

Н. И. Яцкин

**ЖОРДАНОВЫ (И ЧАСТИЧНО ЖОРДАНОВЫ) БАЗИСЫ
ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ
НАД ПОЛЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ**



Иваново 2010

Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО «Ивановский государственный университет»

Н. И. ЯЦКИН

**ЖОРДАНОВЫ
(И ЧАСТИЧНО ЖОРДАНОВЫ)
БАЗИСЫ**

**ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ
НАД ПОЛЕМ
РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ**

*Учебное пособие
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки
010200 «Математика и компьютерные науки»*

Иваново
Издательство «Ивановский государственный университет»
2010

ББК 22.18
Я 936

Яцкин, Н. И.

Жордановы (и частично жордановы) базисы для линейных операторов над полем рациональных чисел: учеб. пособие / Н. И. Яцкин. — Иваново : Иван. гос. ун-т, 2010. — 180 с.

ISBN 978-5-7807-0841-4

Детально описывается (точно работающий) алгоритм построения жорданова (или частично жорданова) базиса для линейного оператора, действующего в конечномерном линейном пространстве над полем рациональных чисел.

Будучи выраженной на матричном языке, эта задача состоит в приведении квадратной матрицы с элементами из поля рациональных чисел к (полной или частичной) жордановой нормальной форме.

Описывается реализация рассматриваемого алгоритма средствами компьютерной алгебраической системы Maple.

Читатели (пользователи) представляемой обучающей программы (сценария) получают возможность (в диалоге с системой) освоить все тонкости изучаемого метода, познакомиться с важными особыми случаями.

Пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлению «Математика и компьютерные науки».

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
Ивановского государственного университета*

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор **Б. Я. Солон**
(Ивановский государственный химико-технологический университет)

кафедра высшей математики и статистики
Ивановской государственной текстильной академии

ISBN 978-5-7807-0841-4

© Яцкин Н. И., 2010
© ГОУ ВПО «Ивановский
государственный университет», 2010

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Жордановы базисы для линейных операторов	7
§ 1.1. Постановка задачи и ее арифметизация	7
§ 1.2. Алгоритм построения жорданова базиса	12
Глава 2. Пакет Maple-процедур LinAlgJ (линейная алгебра над полем \mathbb{Q})	35
§ 2.1. Вспомогательные процедуры пакета LinAlgJ	36
§ 2.2. Процедура-сценарий JRD	48
Глава 3. Примеры работы процедуры-сценария JRD	72
§ 3.1. Случай наличия полного жорданова базиса	72
§ 3.2. Случай наличия частичного жорданова базиса	100
§ 3.3. Задачи для "полуручного" решения	119
Глава 4. Терминологический справочник	124
§ 4.1. Линейные пространства	124
§ 4.2. Системы векторов в линейных пространствах	125
§ 4.3. Линейные подпространства	128
§ 4.4. Линейные отображения (гомоморфизмы)	132
§ 4.5. Линейные операторы (эндоморфизмы)	136
§ 4.6. Спектральная теория линейных эндоморфизмов	143
§ 4.7. Теорема о стабилизации и теорема Фробениуса	153
§ 4.8. Корневые подпространства и теорема Жордана	160
§ 4.9. Алфавитный указатель	171
Список рекомендуемой литературы	176
Приложение. Вид столбчатой диаграммы	179

Введение

Настоящее пособие задумано как расширенное *руководство* для студентов, выполняющих в рамках учебного курса "Линейная алгебра и геометрия" лабораторные работы и типовой расчет по наиболее сложной (и, по сути, ключевой) теме этого курса: "Жорданов базис для линейного оператора. Жорданова нормальная форма (ж.н.ф) квадратной матрицы".

Предполагается, что теоретический материал по указанной теме студенты будут изучать по учебному пособию автора [LA] (см. ниже), но это условие не является обязательным, поскольку руководство снабжено достаточно подробным *терминологическим справочником* (см. гл. 4).

В книге реализуется широко применяемая в ведущих университетах мира методика преподавания общих математических дисциплин с использованием компьютерных алгебраических систем (КАС).

Мы используем, по-видимому, самую популярную и мощную из них — систему **Maple**.

В отечественной высшей школе внедрение компьютерных алгебраических систем в качестве *обучающих* долгое время сдерживалось ограниченностью финансирования, однако в последние годы здесь наметился определенный прогресс; можно надеяться, что за пропагандируемой методикой большое будущее.

В первой главе мы кратко, в основном, следуя [LA], описываем постановку задачи о построении *жорданова базиса* для линейного оператора, действующего в конечномерном линейном пространстве. (Актуальность этой проблемы становится очевидной любому субъекту, изучающему линейную алгебру, после того, как он осознает несбыточность "мечты" об отыскании *диагонализирующего* базиса.)

Так называемая *арифметизация* задачи позволяет перейти с *операторного* на *матричный* язык. В каждом базисе линейному оператору отвечает определенная квадратная матрица. При замене базиса матрица оператора заменяется на *подобную*. В матричной формулировке речь

идет о в *приведении* квадратной матрицы к *жордановой нормальной форме* (ж.н.ф.).

Изложение ведется над произвольным полем. В такой общности искомый базис *во всем пространстве* существует не всегда. В случае отсутствия *полного жорданова базиса* мы удовлетворяемся некоторым его суррогатом — *частично жордановым базисом*. В жордановом базисе линейному оператору отвечает матрица, имеющая ж.н.ф., в частично жордановом — матрица, имеющая *частично жорданову форму* (т. е. блочно-диагональный вид, с двумя диагональными блоками, первый из которых имеет ж.н.ф., а второй — не имеет характеристических корней в основном поле).

Если рассматриваемое поле является алгебраически замкнутым, то всякая квадратная матрица может быть приведена к ж.н.ф. Однако на пути практических вычислений (скажем, в наиболее интересном для приложений случае *поля комплексных чисел*) неизбежно обнаруживаются принципиальные трудности, характерные для вычислительной математики вообще и проистекающие из невозможности точного определения характеристических корней матрицы (даже в случае, если элементы этой матрицы полагаются известными точно).

Линейная алгебра изучается на первом курсе, когда еще не готов необходимый аналитический аппарат для постановки и исследования задач *численными методами*. Это вынуждает нас отказаться на данном этапе от рассмотрения примеров, решаемых приближенно.

По мнению автора, это не должно нас слишком огорчать, поскольку в современной теоретической и прикладной математике все большее значение приобретают *точно работающие алгоритмы*, применяемые над *конечными полями*, а также — над *полем рациональных чисел* \mathbb{Q} (и его конечными расширениями).

И опять же, на первом курсе студенты еще не знакомы ни с общей теорией полей, ни с примерами конечных полей. В первом семестре, в курсе алгебры (см., например, пособие [A], ссылка — ниже), приводятся лишь самые элементарные сведения о числовых полях.

Фактически оказывается доступным лишь случай поля рациональных чисел, над которым и будет конструироваться **Maple**-процедура приведения матриц к (возможно, частичной) ж.н.ф.

Описанию процедуры-сценария **JRD**, решающей поставленную выше задачу над \mathbb{Q} , посвящена вторая глава.

В третьей главе рассматриваются примеры.

Во избежание упреков в *неоптимальности* кодов, сразу разъясним

концепцию: процедура ведет *диалог* с пользователем на том же языке, на котором излагается теоретический материал, с использованием обозначений пособия [LA].

Если бы нам требовался лишь конечный результат, то многочисленные "промежуточные" массивы оказались бы не нужны.

Мы же подробно объясняем (и демонстрируем пошагово) работу алгоритма, причем алгоритма — сложного, хотя и элементарного, который гарантирует получение точного результата (разумеется, в рамках возможностей применяемой вычислительной техники).

Какого размера матрицы сможет приводить к ж.н.ф. процедура-сценарий, будет зависеть от способностей используемых компьютеров.

Для учебных целей вряд ли понадобятся матрицы порядка, большего двадцати. В то же время, автор убежден, что на материале матриц порядка "не выше четырех" (см. традиционные задачки) ничего интересного по данной теме продемонстрировать нельзя.

На старших курсах, при изучении конечных полей и полей алгебраических чисел, возможно и желательно возвращение (скажем, в рамках курсовых работ) к материалу данного руководства с целью модификации процедуры **JRD** в плане ее приспособления к работе над другими полями.

В конце книги приводится список рекомендуемой литературы, в который включены наиболее популярные учебники и учебные пособия по курсу линейной алгебры, а также руководства по системе **Maple**.

Здесь приводится библиографическое описание учебных пособий автора, отсылки к которым давались выше.

[A] Яцкин Н. И. Алгебра: Теоремы и алгоритмы. Иваново: Ивановский гос. ун-т, 2006. — 506 с.

[LA] Яцкин Н. И. Линейная алгебра: Теоремы и алгоритмы. Иваново: Ивановский гос. ун-т, 2008. — 607 с.

Глава 1

ЖОРДАНОВЫ БАЗИСЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1.1. Постановка задачи и ее арифметизация

Линейная алгебра является самой рабочей (самой востребованной в приложениях) из математических наук.

В академическом обзоре "Математика XIX века" (под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича; М.: Наука, 1978), в главе, посвященной истории алгебры говорится, что уже к 1870 году *"были доказаны все основные теоремы линейной алгебры"*, что в последующие полвека *"поле приложений линейной алгебры всё увеличивалось"* и что *"к концу этого периода линейная алгебра уже рассматривалась всем математическим миром как замечательная стройная теория, которая должна быть элементом общего образования и активным орудием в руках каждого математика"*.

И завершается "ода" линейной алгебре следующим пассажем: *"Пожалуй, можно сказать, что сейчас в линейной алгебре всё очевидно — она стала просто элементом нашего мышления"*.

К восторженным высказываниям историков можно добавить, что (в какой-то степени, вопреки их восторгам) прогресс в области линейной алгебры отнюдь не затормозился и в двадцать первом веке .

Во-первых, компьютерная революция (в двадцатом веке) сделала доступными ранее немислимые вычисления, с использованием как классических, так и вновь изобретенных алгоритмов. А во-вторых, внутренняя логика развития науки привела к постановке принципиально новых проблем и к радикальному расширению области исследований.

Реклама закончена. Пора приступать к изучению одного из самых важных и знаменитых классических результатов линейной алгебры.

Ареной, на которой разыгрываются линейно-алгебраические сценарии, служит класс *конечномерных линейных пространств*. Каждое такое пространство задается над определенным *полем*; пространство состоит из векторов, элементы поля служат скалярами.

Главными действующими лицами линейно-алгебраических спектаклей служат *линейные отображения* из одного конечномерного линейного пространства в другое (заданное над тем же полем). Линейные отображения иначе именуется *линейными операторами* (в широком смысле этого термина; так предпочитают говорить в тех разделах математики, в которых алгебраические методы сочетаются с аналитическими). В чисто алгебраических сферах используется третий термин: *линейные гомоморфизмы*.

Особый интерес представляют *линейные операторы* (в узком смысле этого термина), являющиеся линейными отображениями из какого-либо конечномерного линейного пространства в само это пространство. Алгебраисты именуют такие операторы *линейными эндоморфизмами*.

Линейные пространства оснащаются измерительными приборами — *базисами*. Используя какой-либо базис \mathcal{B} в n -мерном пространстве V (над полем P) и какой-либо базис \mathcal{C} в m -мерном пространстве W (над P), можно всякому линейному отображению $\varphi : V \rightarrow W$ сопоставить определенную $(m \times n)$ -матрицу A (с элементами из P), полностью характеризующую действие отображения φ .

Разумеется, нам хотелось бы, по возможности, выбрать базисы так, чтобы матрица, отвечающая линейному отображению, была как можно проще. И здесь, в принципе, достигим идеал: базисы \mathcal{B} и \mathcal{C} всегда можно выбрать так, чтобы матрица A имела *скелетный* вид, т. е. чтобы все ее элементы равнялись нулю, кроме r элементов, равных единице, расположенных в начале главной диагонали (причем число r определено по отображению φ однозначно и имеет смысл *ранга* этого отображения).

Совершенно иначе обстоит дело в особом случае линейных операторов (эндоморфизмов), действующих в одном конечномерном линейном пространстве V . В данной ситуации разумно выбирать только один базис (скажем, \mathcal{B}), причем снова желательно получить матрицу A (теперь она обязана быть квадратной, размера $n \times n$) наиболее простого возможного вида.

Анализируя описанную выше задачу, математики вскоре пришли к следующему выводу: для линейных операторов идеальным было бы отыскание *диагонализующего* базиса \mathcal{G} , в котором оператору $\varphi : V \rightarrow V$

соответствовала бы диагональная матрица

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}; \quad (1.1.1)$$

при этом базис \mathcal{G} состоял бы из так называемых *собственных* (для оператора φ) *векторов*, а на диагонали матрицы A фигурировали бы соответствующие *собственные значения* (составляющие так называемый *спектр* линейного оператора).

В дальнейшем, однако, выяснилось, что столь замечательный идеал оказывается достижимым не всегда: даже над самым хорошим (*алгебраически замкнутым*) полем всегда существуют *недиагонализируемые* линейные операторы. Более того, стало ясно, что разнообразие целого ряда природных явлений и процессов (к описанию которых имеет касательство линейная алгебра) во многом объясняется вновь обнаруженным "математическим явлением" — возможным наличием у линейных операторов структуры, более сложной, нежели диагональная.

Какова же эта структура? Именно к (упомянутому выше) 1870 году, благодаря выдающимся трудам Карла Вейерштарасса и Камиля Жордана, было установлено, что для любого линейного оператора (над алгебраически замкнутым полем) существует *жорданов базис* (имя, разумеется, было присвоено значительно позже), в котором этому оператору отвечает *блочно-диагональная* матрица

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & & & \\ & \boxed{J_{k_2}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_{k_s}(\lambda_s)} \end{pmatrix}, \quad (1.1.2)$$

каждый блок которой представляет собой так называемый *жорданов ящик* (или: *жорданову клетку*)

$$\boxed{J_{k_i}(\lambda_i)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & & \lambda_i \end{pmatrix}; \quad i = 1, \dots, s. \quad (1.1.3)$$

Как и в матрице (1.1.1), по диагонали всех ящиков (1.1.3) располагаются собственные значения данного оператора. Они не обязательно различны, но базис можно перегруппировать так, чтобы жордановы ящики, отвечающие одному и тому же собственному значению, шли подряд, причем — в порядке невозрастания их размеров. Диагональная форма (1.1.1) является частным случаем жордановой нормальной формы (1.1.2); этот случай характеризуется тем, что все ящики имеют минимальный возможный размер 1×1 .

Теперь мы переходим к более строгой постановке рассматриваемой задачи. Читателям, впервые знакомящимся с излагаемым материалом, предлагается в случае встречи с непонятным термином обращаться к **терминологическому справочнику** (см. гл. 4; алфавитный указатель — в § 4.9).

П о с т а н о в к а з а д а ч и

Д а н о: конечномерное (размерности n) линейное пространство V над полем P и линейный оператор (эндоморфизм) $\varphi : V \rightarrow V$.

Т р е б у е т с я: отыскать (построить) в пространстве V жорданов базис \mathcal{G} для оператора φ (в котором этому оператору отвечала бы матрица J , имеющая ж.н.ф. (1.1.2)).

А р и ф м е т и з а ц и я з а д а ч и

Чтобы найти жорданов базис для линейного оператора, надо прежде всего иметь хоть какой-либо (*исходный*) базис \mathcal{B} в данном линейном пространстве, а также располагать матрицей A , отвечающей данному оператору в исходном базисе. Это позволит произвести так называемую *арифметизацию* исходных данных (пространства и оператора), т. е. перейти от исходных (*абстрактных*) объектов к их *изоморфным копиям*:

— пространство V заменяется на изоморфное ему *арифметическое линейное пространство* P^n ; при этом произвольный вектор $x \in V$ отождествляется с арифметическим вектором-столбцом $\bar{x} \in P^n$, составленным из координат вектора x относительно базиса \mathcal{B} (сам исходный базис \mathcal{B} отождествляется с *естественным базисом* \mathcal{E}_n пространства P^n);

— действие $y = \varphi(x)$ исходного оператора φ в исходном пространстве V выражается (с помощью матрицы A) действием оператора

$$\Phi : P^n \rightarrow P^n; \bar{y} = \Phi(\bar{x}) = A \cdot \bar{x} \quad (1.1.4)$$

в арифметическом пространстве P^n .

Замена исходного базиса \mathcal{B} на новый базис \mathcal{G} описывается *матрицей перехода* T (содержащей координатные столбцы всех векторов нового базиса относительно старого). Матрица T обратима; новая матрица J (отвечающая данному оператору в новом базисе) выражается через матрицу A формулой

$$J = T^{-1} \cdot A \cdot T; \quad (1.1.5)$$

говорят, что матрица J *подобна* (посредством T) матрице A .

В арифметизованной постановке задачи основной неизвестной оказывается именно матрица перехода T ; по ней однозначно восстанавливается искомый жорданов базис. Матрицу T следует подобрать так, чтобы (подобная исходной) матрица (1.1.5) имела жорданову нормальную форму.

Читатель должен иметь в виду, что в описанной выше постановке задача имеет полное решение не всегда. Это связано с "кондициями" основного поля P . Однако в случае алгебраической замкнутости P решение обязательно существует, хотя далеко не всегда оно достижимо посредством точных вычислений (об этом говорилось во введении).

Если основное поле не является алгебраически замкнутым (наше "рабочее" поле \mathbb{Q} будет именно таким), то приходится ограничиваться более слабым результатом — приведением матрицы линейного оператора к частично жордановой форме

$$J = \begin{pmatrix} J' & \\ & J'' \end{pmatrix}, \quad (1.1.6)$$

где блок J' имеет ж.н.ф., а блок J'' не имеет характеристических корней в поле P .

Далее укажем на принципиальную неоднозначность (за исключением тривиальных случаев) решения задачи. (Вообще, задачи, связанные с построением базисов, как правило, сильно неоднозначны.) В то же время, вторая часть ответа, нормальная форма J , определена "почти однозначно" (однозначно, с точностью до порядка жордановых ящиков, который, в свою очередь, определяется нумерацией собственных значений).

Таким образом, в самом грубом, не детализированном виде схема исходных и искоемых переменных имеет следующий вид:

является вычисление определителя этой матрицы

$$h_A(\lambda) = \det(\lambda E - A); \quad (1.2.2)$$

результат представляет собой многочлен степени n от переменной λ , называемый *характеристическим многочленом* для матрицы A ; тот факт, что этот многочлен не меняется при замене исходного (арифметизирующего) базиса, позволяет отнести его к заданному линейному оператору φ и писать $h_\varphi(\lambda)$ вместо $h_A(\lambda)$.

Способы вычисления определителей для матриц, элементы которых являются многочленами над заданным полем (или же принадлежат какому-либо иному коммутативному кольцу), не использующие операции деления, совершенно элементарны и универсальны, но — чрезвычайно трудоемки в вычислительном отношении. Ручное выполнение этой работы становится практически неосуществимым при сколь угодно значительных размерах матриц. Студентам можно предложить воспользоваться **Maple**-командой **Determinant**, применив ее к характеристической матрице, или же — сразу применить к заданной матрице A команду **CharacteristicPolynomial**.

Следующий шаг первого этапа является наиболее "полезависимым": требуется вычислить все (принадлежащие полю P) *характеристические корни* (т. е. корни многочлена (1.2.2)), вместе с их *кратностями*. Таким образом, должны быть получены два списка: список (каким-либо образом упорядоченных) характеристических корней $[\lambda_1, \dots, \lambda_s]$ и список соответствующих кратностей $[m_1, \dots, m_s]$.

Характеристические корни имеют инвариантный смысл: они являются *собственными значениями* (составляют *спектр* $\sigma(\varphi)$) данного оператора; кратности m_i принято называть *алгебраическими кратностями* соответствующих собственных значений λ_i ($i = 1, \dots, s$); неотрицательное (и не превышающее n) целое число s представляет собой *мощность спектра*. Совершенно безнадёжным является случай $s = 0$, исключающий существование какого-либо (даже частичного) жорданова базиса для данного оператора (если, конечно, не выходить за рамки основного поля P).

Если $s > 0$, то требуется разложить на множители характеристический многочлен (1.2.2), выделив линейные множители, отвечающие характеристическим корням, и множитель, не имеющий корней (в поле P):

$$h_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s} g(\lambda), \quad (1.2.3)$$

где многочлен $g(\lambda)$ не имеет корней в P , его степень определяется фор-

мулой

$$\deg(g(\lambda)) = n - m', \quad (1.2.4)$$

где $m' = m_1 + \dots + m_s$ — сумма алгебраических кратностей всех собственных значений.

Вычислив сумму алгебраических кратностей m' , мы можем сделать вывод о существовании *полного* либо *частичного* жорданова базиса для оператора φ . А именно:

— если $m' = n$, то в пространстве V существует полный жорданов базис; в этом (и только этом) случае в формуле (1.2.3) $g(\lambda) = 1$, т. е. характеристический многочлен полностью *разлагается на линейные множители*:

$$h_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}; \quad (1.2.3a)$$

— если $m' < n$, то существует лишь частичный жорданов базис в некотором линейном подпространстве $U' < V$ (*корневой сумме* для оператора φ ; описание подпространства U' см. ниже); этот базис подлежит *продолжению* до так называемого *частично жорданова* базиса (уже во всем пространстве V).

Не существует каких-либо универсальных методов отыскания корней многочленов, которые работали бы над произвольным полем. Алгебраическая замкнутость поля P гарантирует, что любой многочлен степени $n \geq 1$ имеет ровно n корней в поле P (с учетом кратностей), однако не дает никакого алгоритма для практического определения всех корней.

Мы будем рассматривать задачи над полем \mathbb{Q} рациональных чисел, заведомо не являющимся алгебраически замкнутым. Зато нам известен (изучен в первом семестре, в курсе алгебры) очень простой алгоритм вычисления всех рациональных корней для многочленов с рациональными коэффициентами. Напомним основные моменты реализации этого алгоритма.

Характеристический многочлен, по построению, является *нормализованным*, т. е. имеет единичный старший коэффициент: $h_A(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1}\lambda + c_n$; коэффициенты c_i ($i = 1, \dots, n$), являющиеся несократимыми дробями, вместе со старшим коэффициентом $c_0 = 1$, приведем к общему знаменателю t , который затем вынесем за скобку; теперь наш многочлен представлен в виде произведения рационального числа $1/t$ на многочлен с целыми коэффициентами b_i (старший коэффициент которого уже не обязательно равен единице):

$$h_A(\lambda) = \frac{1}{t}(b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1}\lambda + b_n).$$

Исходный многочлен имеет те же рациональные корни (с теми же кратностями), что и многочлен с целыми коэффициентами, фигурирующий в скобках. Нулевой корень (если он имеется) легко усматривается, вместе со своей кратностью r . (Здесь, разумеется, возможно $r = 0$.) Выносим λ^r за скобку; в скобках остается для решающего исследования многочлен степени $k = n - r$, с целыми коэффициентами a_i и

ненулевым свободным членом a_k :

$$h_A(\lambda) = \frac{1}{t} \lambda^r (a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{k-1} \lambda + a_k).$$

Корни последнего многочлена можно найти простым перебором "подозрительных" чисел, список которых составляется в три этапа. Сначала формируется список \mathcal{A} всех делителей свободного члена a_k , затем — список \mathcal{B} всех положительных делителей старшего коэффициента a_0 и, наконец, — список \mathcal{C} всех (приведенных к несократимой форме) рациональных дробей вида p/q , где p берется из списка \mathcal{A} , а q — из списка \mathcal{B} .

Числа из списка \mathcal{C} последовательно проверяются (с помощью *ступенчатой схемы Горнера*; подробности см. в [A], § 42) на предмет того, являются ли они корнями исследуемого многочлена (если да, то попутно выясняются их кратности).

Проверка завершается:

— либо в случае исчерпания списка \mathcal{C} ; тогда возможно строгое неравенство $m' < n$ для суммы кратностей всех корней и присутствие в разложении (1.2.3) неединичного множителя $g(\lambda)$, также определяемого по схеме Горнера;

— либо в случае достижения суммарной кратностью найденных корней предельного значения n ; тогда будет иметь место полное разложение на линейные множители (1.2.3а).

В случае необходимости прибегнуть для отыскания корней многочлена к **Maple**-поддержке, можно воспользоваться функцией **roots** (по умолчанию для многочлена с рациональными коэффициентами она определяет рациональные корни), хотя, может быть, удобнее применить осуществляющую разложение на множители команду **factor** [она дополнительно обеспечит вычисление (не имеющего рациональных корней) многочлена $g(\lambda)$, который будет выдан разложенным на неприводимые (нелинейные) множители]. Имеется также возможность применить (непосредственно к матрице A) функцию **Eigenvalues**, входящую в состав модуля **LinearAlgebra**.

Э т а п 2. О п р е д е л е н и е (н е о б р а б о т а н н ы х)
б а з и с о в в и т е р и р о в а н н ы х я д р а х
д л я с м е щ е н н ы х л и н е й н ы х о п е р а т о р о в

Второй этап выполняется по отдельности для каждого из собственных значений (характеристических корней) λ_i ($i = 1, \dots, s$), найденных на первом этапе. Фактически речь идет об однотипных по д е т а п а х 2 i, выполняемых независимо для каждого из s так называемых *смещенных линейных операторов* (эндоморфизмов)

$$\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon : V \rightarrow V, \quad (1.2.5)$$

действие которых

$$\psi_i(\bar{x}) = B_i \cdot \bar{x}; \quad \bar{x} \in V \quad (1.2.6)$$

задается *смещенными матрицами*

$$B_i = A - \lambda_i E; \quad i = 1, \dots, s. \quad (1.2.7)$$

По определению собственных значений все операторы ψ_i (и все матрицы B_i) являются *необратимыми*. Следовательно, *ядра*

$$W_i = \text{Ker}(\psi_i); \quad i = 1, \dots, s \quad (1.2.8)$$

все являются *нетривиальными* (ненулевыми) линейными подпространствами пространства V .

Каждое из W_i задается (благодаря произведенной ранее арифметизации) с помощью однородной системы линейных уравнений:

$$W_i = L_{B_i}^0 = \{\bar{x} \in V : B_i \cdot \bar{x} = \bar{0}\} \quad (1.2.9)$$

и является не чем иным, как *собственным подпространством* для линейного оператора φ , отвечающим собственному значению λ_i (используется обозначение: $W_i = S_{\lambda_i}(\varphi)$); ненулевые элементы подпространства W_i принято называть *собственными векторами* (отвечающими λ_i). Формула (1.2.9) представляет W_i как *ядро (нуль-пространство)* матрицы B_i .

Размерности собственных подпространств получают специальное наименование — *геометрические кратности* собственных значений, и обозначение:

$$n_i = \dim(W_i); \quad i = 1, \dots, s; \quad (1.2.10)$$

они могут быть вычислены по формулам

$$n_i = \text{dfc}(B_i) = n - \text{rank}(B_i) \quad (1.2.11)$$

через так называемые *дефекты* матриц B_i (или, что равносильно, — операторов ψ_i).

Если решить однородную систему линейных уравнений, фигурирующую в (1.2.9), и составить (из базисных частных решений) *фундаментальную матрицу* F_i этой системы (F_i будет иметь размеры $n \times n_i$), то собственное подпространство можно будет задать вторым способом (причем "экономно"), как *образ* (линейную оболочку векторов-столбцов) матрицы F_i (имеющей полный ранг по столбцам):

$$W_i = R_{F_i}. \quad (1.2.12)$$

Объекты и величины, описываемые формулами (1.2.5) — (1.2.12), являются начальными в серии аналогичных, но *итерированных* объектов

и величин. Знания одних только собственных подпространств, как правило, недостаточно для полного описания структуры исследуемого линейного оператора. Приходится рассматривать не только ядра (образы, дефекты, ранги) для смещенных операторов (1.2.5), но также и ядра (образы, дефекты, ранги) для *итераций*, т. е. *степеней* (в смысле композиции) этих операторов:

$$\psi_i^k = (\varphi - \lambda_i \varepsilon)^k : V \rightarrow V; \quad (1.2.5k)$$

$$\psi_i^k(\bar{x}) = B_i^k \cdot \bar{x}; \quad \bar{x} \in V, \quad (1.2.6k)$$

где $k \in \mathbb{N}$.

Итерированные ядра нумеруются верхним индексом (k); в скобки он берется с тем, чтобы отличать индекс (номер) от показателя степени:

$$N_i^{(k)} = \text{Ker}(\psi_i^k); \quad i = 1, \dots, s; \quad k = 1, 2, \dots; \quad (1.2.8k)$$

$$N_i^{(k)} = L_{B_i^k}^0 = \{\bar{x} \in V : B_i^k \cdot \bar{x} = \bar{0}\}. \quad (1.2.9k)$$

Размерности итерированных ядер представляются как *итерированные дефекты* (т. е. дефекты степеней):

$$d_i^{(k)} = \dim(N_i^{(k)}); \quad i = 1, \dots, s; \quad k = 1, 2, \dots; \quad (1.2.10k)$$

$$d_i^{(k)} = \text{dfc}(B_i^k) = n - \text{rank}(B_i^k). \quad (1.2.11k)$$

Решая однородную систему, фигурирующую в (1.2.9k), и составляя *фундаментальную матрицу* $F_i^{(k)}$ (размера $n \times d_i^{(k)}$), мы приходим к заданию итерированного ядра вторым способом, через (содержащийся в фундаментальной матрице) базис этого подпространства:

$$N_i^{(k)} = R_{F_i^{(k)}}. \quad (1.2.12k)$$

Первое из итерированных ядер совпадает с собственным подпространством: $N_i^{(1)} = W_i$. Первый из итерированных дефектов есть не что иное, как геометрическая кратность собственного значения: $d_i^{(1)} = n_i$.

Согласно *теореме о стабилизации*, для любого необратимого линейного оператора ψ , действующего в n -мерном линейном пространстве, существует натуральное число l (не превышающее размерности n ; оно называется *показателем стабилизации* для ψ) такое, что при $1 \leq k \leq l$ итерированные ядра $N^{(k)} = \text{Ker}(\psi^k)$ образуют *строго возрастающую* (расширяющуюся) последовательность линейных подпространств, а начиная с $k = l$ итерированные ядра *стабилизируются* (остаются неизменными при дальнейшем возрастании k). Размерности итерированных

ядер (т.е. итерированные дефекты) образуют последовательность натуральных чисел, строго возрастающую при $1 \leq k \leq l$ и стабилизирующуюся при $k \geq l_i$, причем момент стабилизации "ловится" следующим образом: итерированные дефекты возрастают до тех пор, пока очередной из них не сравняется с кратностью нулевого собственного значения для оператора ψ (спектр необратимого оператора обязан содержать нуль).

В нашей задаче мы имеем *семейство* смещенных линейных операторов (1.2.5), каждый из которых необратим и допускает применение сформулированной выше теоремы. Показатель стабилизации для оператора ψ_i мы будем обозначать l_i (сигналом о достижении стабилизации $k = l_i$ служит теперь равенство очередного итерированного дефекта $d_i^{(k)}$ и алгебраической кратности m_i собственного значения λ_i):

$$0 < \begin{array}{c} d_i^{(1)} \\ \parallel \\ n_i \end{array} < d_i^{(2)} < \dots < d_i^{(l_i-1)} < \begin{array}{c} d_i^{(l_i)} \\ \parallel \\ m_i \end{array} = d_i^{(l_i+1)} = \dots \leq n. \quad (1.2.13)$$

Формула (1.2.13) схематически изображает последовательность итерированных дефектов (т.е. последовательность размерностей итерированных ядер); *первый дефект* совпадает с *геометрической кратностью* собственного значения; *стабильный дефект* должен совпадать с *алгебраической кратностью*.

Далее мы изобразим последовательность самих итерированных ядер. Это уже будет не числовая последовательность, а последовательность линейных подпространств; знаки " \leq " и "<" в ней имеют другой смысл, отличный от "школьного", а именно: "является подпространством" и "является истинным подпространством" соответственно:

$$O < \begin{array}{c} N_i^{(1)} \\ \parallel \\ W_i \end{array} < N_i^{(2)} < \dots < N_i^{(l_i-1)} < \begin{array}{c} N_i^{(l_i)} \\ \parallel \\ U_i \end{array} = N_i^{(l_i+1)} = \dots \leq V. \quad (1.2.14)$$

Мы уже отмечали, что *первое из итерированных ядер* совпадает с *собственным подпространством* $W_i = S_{\lambda_i}(\varphi)$. Обратите внимание на два уровня обозначений: краткий и более детальный, с указанием того оператора и того собственного значения, по которым строится собственное подпространство. *Стабильное итерированное ядро* называется *корневым подпространством*, отвечающим λ_i ; оно обозначается (также двояко: коротко и несколько подробнее): $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$. Все это учтено в схеме (1.2.14).

Не исключается случай, когда собственное и корневое подпространство совпадают ($U_i = W_i$); он имеет место тогда и только тогда, когда показатель стабилизации $l_i = 1$.

Практические вычисления (для каждого i) организуются следующим образом: последовательно, начиная с $k = 1$, решаются однородные системы линейных уравнений $B_i^k \cdot \bar{x} = \bar{0}$ и составляются фундаментальные матрицы $F_i^{(k)}$; процесс останавливается, когда очередной итерированный дефект $d_i^{(k)}$ (число столбцов в матрице $F_i^{(k)}$) сравнивается с алгебраической кратностью m_i .

Так формируется последовательность (всё расширяющихся) матриц

$$F_i^{(1)}; F_i^{(2)}; \dots; F_i^{(l_i-1)}; F_i^{(l_i)}, \quad (1.2.15)$$

содержащих базисы в каждом из итерированных ядер, начиная с собственного подпространства и заканчивая корневым.

Мы называем эти базисы "необработанными" в связи с тем, что в дальнейшем будем их "обрабатывать". До этой "обработки" не следует ожидать, что в (1.2.15) предшествующая матрица окажется *подматрицей* в последующей (хотя иногда, нечаянно, это и может случаться).

В качестве помощи при ручном (точнее, "полуручном") решении расчетных заданий можно порекомендовать студентам использование специализированных **Maple**-процедур пакета **LinAlgJ** (см. § 3). Вполне допустимо также обращение к стандартным функциям типа **LinearSolve** или **NullSpace**.

Э т а п 3. О п р е д е л е н и е п а р а м е т р о в с т о л б ч а т ы х д и а г р а м м и в ы ч и с л е н и е (ч а с т и ч н о й) ж о р д а н о в о й н о р м а л ь н о й ф о р м ы

Третий этап работы алгоритма, как и второй, выполняется по отдельности для номера $i = 1, \dots, s$ (т. е., точнее выражаясь, — для каждого из смещенных линейных операторов ψ_i), и начинается он с вычисления *первых и вторых приращений* для последовательностей (1.2.13) итерированных дефектов.

Первые приращения итерированных дефектов определяются как разности между соседними членами последовательности (1.2.13):

$$p_i^{(1)} = d_i^{(1)}; \quad p_i^{(k)} = d_i^{(k)} - d_i^{(k-1)}; \quad k = 2, \dots, l_i; \quad (1.2.16)$$

все эти числа являются положительными (при $k > l_i$ приращения можно не рассматривать, поскольку, в силу стабилизации, все они оказываются нулевыми).

В дальнейших рассмотрениях и построениях ключевую роль играют *неравенства Фробениуса*

$$p_i^{(k)} \leq p_i^{(k+1)}; \quad k = 1, \dots, l_i - 1, \quad (1.2.17)$$

смысл которых состоит в том, что последовательность $p_i^{(k)}$ ($k = 1, \dots, l_i$) является *невозрастающей*. Если для этой последовательности, в свою очередь, вычислить приращения, то они окажутся неположительными. Для исходной последовательности итерированных дефектов это будут уже вторые приращения.

Удобнее рассматривать числа, противоположные вторым приращениям, и произвести сдвиг нумерации (на единицу). Так получаются *абсолютные вторые приращения итерированных дефектов*

$$q_i^{(k)} = p_i^{(k)} - p_i^{(k+1)}; \quad k = 1, \dots, l_i - 1; \quad q_i^{(l_i)} = p_i^{(l_i)}. \quad (1.2.18)$$

Все числа (1.2.18) неотрицательны; любое из них, кроме последнего, в принципе, может оказаться нулевым.

Итак, нами описаны три числовые последовательности, связанные с заданным собственным значением λ_i линейного оператора φ (точнее, — с соответствующим смещенным оператором ψ_i): $\{d_i^{(k)}\}$; $\{p_i^{(k)}\}$ и $\{q_i^{(k)}\}$. Эти последовательности являются конечными: количество членов в каждой из них равняется показателю стабилизации l_i . Первая последовательность (итерированных дефектов) составлена из натуральных чисел и строго возрастает; первый ее член равен геометрической кратности n_i , последний — алгебраической кратности m_i . Вторая последовательность (первых приращений итерированных дефектов) также составлена из натуральных чисел и начинается с n_i ; она невозрастает; сумма всех первых приращений равна m_i . Третья последовательность (абсолютных вторых приращений итерированных дефектов) составлена из неотрицательных целых чисел; она заканчивается тем же числом, что и вторая последовательность; сумма всех вторых приращений равняется n_i .

Члены описанных выше последовательностей будут фигурировать далее в качестве параметров так называемой *столбчатой диаграммы*, обозначаемой \mathcal{D}_i и также связанной с рассматриваемым ψ_i .

Сейчас самое время взглянуть на последнюю страницу настоящего руководства, где воспроизведена (из пособия [LA]) столбчатая диаграмма общего вида.

Диаграмма \mathcal{D}_i является ступенчатой таблицей, состоящей из нескольких (а именно, l_i) *диаграммных строк*, выровненных по левому краю и

нумеруемых *снизу вверх*. Строки состоят из *диаграммных ячеек*, предназначенных для хранения векторов искомого жорданова базиса в корневом подпространстве

$$U_i = N_i^{(l_i)} = \text{Ker}(\psi_i^{l_i}) = L_{B_i}^0 \quad (1.2.19)$$

(в формуле выше подпространство U_i описано тремя различными способами). Количество ячеек в \mathcal{D}_i равняется алгебраической кратности m_i : именно такова *размерность* корневого подпространства. Диаграммная строка с номером k ($1 \leq k \leq l_i$) содержит $p_i^{(k)}$ ячеек, т. е. длины диаграммных строк равны первым приращениям итерированных дефектов, они не возрастают при продвижении снизу вверх.

Абсолютные вторые приращения также видны на диаграмме \mathcal{D}_i : они равны длинам *диаграммных ступенек*, а именно: число $q_i^{(k)}$ есть длина ступеньки на k -ом *этаже* (на любом этаже, кроме верхнего, ступенька может отсутствовать).

Переходим к описанию *диаграммных столбцов*. (Строится диаграмма по строкам, но именно ее столбцы играют ключевую роль в дальнейшем; так что название "столбчатая" дано не случайно.)

Общее количество столбцов в диаграмме \mathcal{D}_i равно длине первой (нижней) строки и, следовательно, равно геометрической кратности n_i . Высоты диаграммных столбцов не возрастают при продвижении слева направо. Всю диаграмму можно разделить на *диаграммные зоны*, объединяющие столбцы одинаковой высоты. Нумеруются зоны *справа налево*, некоторые из них могут оказаться *пустыми*. Никогда не является пустой только последняя (крайняя слева) зона, объединяющая столбцы, высота которых *максимальна* (равна l_i). Зоны естественно сопоставляются со ступеньками: длина k -й зоны (количество столбцов высоты k) равняется длине ступеньки на k -ом этаже, т.е. равняется $q_i^{(k)}$ ($1 \leq k \leq l_i$).

Для ячеек всех имеющихся столбчатых диаграмм \mathcal{D}_i ($i = 1, \dots, s$) (их порядок должен в точности совпадать с ранее зафиксированным порядком собственных значений) также определяется *сквозная* нумерация по следующему закону:

- нижнему вектору первого столбца диаграммы \mathcal{D}_i присваивается номер, равный сумме алгебраических кратностей всех предыдущих собственных значений *плюс единица*: $m_i + \dots + m_{i-1} + 1$;
- дальше нумерация продолжается по принципу:
 - столбцы упорядочиваются слева направо;
 - ячейки в столбцах нумеруются снизу вверх, *по накоплению*.

Таким образом, номер верхнего вектора в последнем столбце диаграммы \mathcal{D}_i окажется равным сумме $m_1 + \dots + m_i$.

Напомним, что столбчатые диаграммы предназначены для хранения векторов искомого жорданова базиса. Пока он не найден, наши (выше занумерованные) ячейки остаются пустыми. На данном этапе известен лишь вид (но не "начинка") таблиц \mathcal{D}_i .

Теперь мы обращаемся к самому важному — к *стрелочкам* на диаграмме \mathcal{D}_i .

Снова см. приложение — последнюю страницу книги.

Каждая из них изображает действие линейного операторы ψ_i .

Вы видите, что все векторы нижней строки отображаются в нуль. Это надо понимать так: эти векторы должны составлять базис в (первом) ядре оператора ψ_i , т. е. в *собственном подпространстве* $W_i = N_i^{(1)}$ (их количество как раз равняется $n_i = \dim(W_i)$).

Далее, векторы второй строки отображаются в нуль "в два применения" оператора ψ_i , т. е. они принадлежат второму ядру $N_i^{(2)}$ и при этом не принадлежат первому ядру. Более того, векторы, входящие в первую либо вторую строки (в совокупности их количество равно второму дефекту $d_i^{(2)}$), должны составлять базис во втором ядре $N_i^{(2)}$. Иначе говоря, вторая диаграммная строка должна содержать базис в некотором *прямом дополнении* к первому итерированному ядру во втором.

*Для понимания дальнейшего требуется уверенное владение понятиями "прямая сумма линейных подпространств" и "прямое дополнение к линейному подпространству". Вы уже знаете, что определение любого используемого термина можно найти в **терминологическом справочнике** (гл. 4). Здесь, однако, — особый случай: без четкого осознания того, что такое прямое дополнение, дальше в чтении продвигаться не стоит. Загляните в справочник именно сейчас.*

Вводятся следующие обозначения: *линейная оболочка* всех векторов k -й строки диаграммы \mathcal{D}_i ($k = 1, \dots, l_i$) обозначается символом $C_i^{(k)}$. При $k = 1$ подпространства $C_i^{(1)}$ и $N_i^{(1)}$, по определению, совпадают, а при $k \geq 2$ подпространство $C_i^{(k)}$ является прямым дополнением к подпространству $N_i^{(k-1)}$ в подпространстве $N_i^{(k)}$. Таким образом, имеют место соотношения

$$N_i^{(1)} = C_i^{(1)}; \quad N_i^{(k)} = N_i^{(k-1)} \oplus C_i^{(k)}; \quad k = 2, \dots, l_i. \quad (1.2.20)$$

Сказанное выше о векторах второй диаграммной строки теперь можно выразить следующим образом: они составляют базис в прямом до-

полнении $C_i^{(2)}$. Далее — аналогично: векторы третьей строки образуют базис в прямом дополнении $C_i^{(3)}$ ко второму ядру в третьем. Векторы последней (верхней) строки образуют базис в прямом дополнении $C_i^{(l_i)}$ к *предстабильному* ядру $N_i^{(l_i-1)}$ в *стабильном* ядре $N_i^{(l_i)} = U_i$.

Разобравшись с понятием прямого дополнения к подпространству (в более широком подпространстве), читателям следует осознать также, что (в нетривиальных случаях) прямое дополнение определено совершенно *неоднозначно*. Описанные выше подпространства $C_i^{(k)}$ станут *конкретными* и явно определенными лишь после того, как будут *заполнены* столбчатые диаграммы (этап 4). При этом векторы k -го этажа будут заноситься в $(n \times p_i^{(k)})$ -матрицу $G_i^{(k)}$ и будет получаться "экономное" представление вторым способом для прямого дополнения:

$$C_i^{(k)} = R_{G_i^{(k)}}; \quad k = 1, \dots, l_i. \quad (1.2.21)$$

Стрелки на схематической диаграмме описывают необходимые требования к выбору прямых дополнений на каждом шаге: прямое дополнение $C_i^{(k)}$ на текущем k -ом этаже ($k < l_i$) должно содержать образ при отображении ψ_i прямого дополнения $C_i^{(k+1)}$ на вышерасположенном $(k+1)$ -ом этаже:

$$\psi_i(C_i^{(k+1)}) \subseteq C_i^{(k)}; \quad k = 1, \dots, l_i - 1. \quad (1.2.22)$$

В связи с этим становится понятной такая организация работы алгоритма, при которой раньше всего производится (совершенно произвольный) выбор последнего дополнения $C_i^{(l_i)}$ (первой заполняется верхняя строка диаграммы). Далее, при движении сверху вниз по этажам диаграммы, каждое следующее (с меньшим номером) дополнение выбирается так, чтобы оно, в согласии с (1.2.22), содержало ψ_i -образ предшествующего дополнения, с бóльшим номером. (Тот факт, что описанная процедура осуществима, составляет содержание *теоремы Фробениуса*.)

Сумма всех прямых дополнений $C_i^{(k)}$ ($k = 1, \dots, l_i$) по построению оказывается *прямой* и равняется i -му корневому подпространству:

$$C_i^{(1)} \oplus \dots \oplus C_i^{(l_i)} = U_i. \quad (1.2.23)$$

Когда все матрицы $G_i^{(k)}$ будут уже найдены (напомним, что это произойдет на следующем этапе работы), их *конкатенация* (объединение)

$$\left(G_i^{(1)} \mid G_i^{(2)} \mid \dots \mid G_i^{(l_i)} \right) \quad (1.2.24)$$

будет содержать базис в U_i .

Это — почти то, что нужно: если в (1.2.24) переставить векторы-столбцы (в соответствии с описанной выше нумерацией ячеек в столбчатой диаграмме \mathcal{D}_i), то полученная $(n \times m_i)$ -матрица G_i будет содержать *жорданов базис* \mathcal{G}_i в корневом подпространстве $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$.

Как известно, каждое из корневых подпространств является *инвариантным* относительно данного линейного оператора φ , т. е. φ переводит каждое из U_i ($i = 1, \dots, s$) в себя: $\varphi(U_i) \subseteq U_i$, и, как следствие, определены линейные операторы

$$\varphi'_i = \varphi|_{U_i} : U_i \rightarrow U_i; \quad \varphi'_i(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}); \quad \bar{x} \in U_i, \quad (1.2.25)$$

являющиеся *сужениями* (ограничениями) φ на подпространства U_i .

И хотя матрицы $G_i^{(k)}$ и матрица G_i пока (на данном этапе) еще не заполнены и жорданов базис \mathcal{G}_i пока не построен, $(m_i \times m_i)$ -матрицу J_i , отвечающую в этом базисе суженному оператору (1.2.25), уже можно выписать. Здесь действует простое

П р а в и л о. Матрица J_i имеет *блочно-диагональный* вид с *жордановыми ящичками* (с фиксированным λ_i) в качестве диагональных блоков. Каждому диаграммному столбцу *высоты* k в столбчатой диаграмме \mathcal{D}_i отвечает в матрице J_i один диагональный блок — $(k \times k)$ -ящик $\boxed{J_k(\lambda_i)}$. Блоки должны располагаться по блочной диагонали в том же порядке (сверху вниз), в каком проходятся (слева направо) соответствующие диаграммные столбцы.

В частности,

- ящички по диагонали идут в порядке *невозрастания размеров*;
- *максимальным* является размер $l_i \times l_i$;
- для любого $k = 1, \dots, l_i$ имеется $q_i^{(k)}$ ящичков размера $k \times k$;
- общее количество ящичков равняется *геометрической кратности* n_i .

Далее, известно, что сумма всех корневых подпространств U_i также является *прямой* и также представляет собой φ -*инвариантное* линейное подпространство

$$U' = Q(\varphi) = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_s, \quad (1.2.26)$$

размерность которого равна сумме $m' = m_1 + m_2 + \dots + m_s$ всех алгебраических кратностей. Подпространство (1.2.26) носит название *корневой суммы* для линейного оператора φ . Сужение этого оператора на свою корневую сумму представляет собой линейный оператор (эндоморфизм)

$$\varphi' : U' \rightarrow U'; \quad \varphi'(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}); \quad \bar{x} \in U', \quad (1.2.27)$$

В подпространстве U' можно задать (согласованный с прямой суммой (1.2.26)) базис

$$\mathcal{G}' = [\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_s], \quad (1.2.28)$$

который будет являться *жордановым* базисом для оператора (1.2.27), или, как можно считать, *частичным жордановым* базисом для исходного оператора φ . В арифметизированном виде этот базис будет представлен матрицей-конкатенацией

$$G' = (G_1 | G_2 | \dots | G_s) \quad (1.2.29)$$

размера $n \times m'$, порядок блоков в которой в точности соответствует зафиксированному ранее порядку собственных значений.

Опять же, матрица (1.2.29), как и "строительные блоки" $G_i^{(k)}$, которые используются для ее построения, нам пока неизвестны. Зато уже может быть выписана имеющая жорданову нормальную форму $(m' \times m')$ -матрица J' , отвечающая суженному оператору φ' в базисе \mathcal{G}' ,

$$J' = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_s), \quad (1.2.30)$$

диагональные блоки которой J_i строятся в соответствии со сформулированным выше п р а в и л о м.

Подводя итог третьему этапу работы алгоритма, перечислим его достижения:

- во-первых, мы получаем последовательность $[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_s]$ "заготовок" для столбчатых диаграмм, с пронумерованными сквозным образом (и пока не заполненными) ячейками, общее количество которых равно сумме m' алгебраических кратностей всех собственных значений;
- во-вторых, заполняется $(m' \times m')$ -матрица J' , имеющая жорданову нормальную форму и отвечающая сужению φ' заданного линейного оператора φ на его корневую сумму U' .

В случае, когда сумма алгебраических кратностей равна размерности пространства ($m' = n$), корневая сумма оказывается не только прямой, но и *полной* ($U' = V$), и наш второй результат, $(n \times n)$ -матрица $J = J'$, является окончательным.

Э т а п 4. П о с т р о е н и е ж о р д а н о в а б а з и с а в к о р н е в о й с у м м е

Теперь начинается наиболее продолжительный и требующий кропотливых вычислений этап, также выполняемый независимо для каждого из собственных значений λ_i .

П о д э т а п 4 i будет состоять в обработке необработанных базисов (1.2.15) во всех итерированных ядрах, вплоть до корневого подпространства U_i , с целью построения жорданова базиса в U_i .

Нашим основным рабочим инструментом будет *алгоритм продолжения базиса* в линейном подпространстве до базиса в другом, более широком линейном подпространстве. Напомним его основную идею. Читатели, знакомые с этим материалом, могут пропустить текст, набранный уменьшенным шрифтом.

Пусть в данном линейном пространстве рассматриваются два линейных подпространства, содержащиеся одно в другом: $L_1 \leq L_2 \leq V$ (не исключается обращение в равенство любого из указанных включений). Пусть \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 — два каких-либо базиса в L_1 и L_2 соответственно (совершенно не обязательно базис более узкого подпространства содержится в базисе более широкого). Требуется выбрать подсистему \mathcal{K}'_1 в системе векторов \mathcal{K}_2 , добавление которой к базису \mathcal{K}_1 дает новый базис $\mathcal{K}'_2 = [\mathcal{K}_1, \mathcal{K}'_1]$ в подпространстве L_2 , содержащий исходный базис \mathcal{K}_1 подпространства L_1 .

При этом линейная оболочка $L'_1 = \langle \mathcal{K}'_1 \rangle$ системы *добавочных* векторов \mathcal{K}'_1 окажется некоторым *прямым дополнением* к подпространству L_1 в подпространстве L_2 , т. е. будет иметь место равенство $L_1 \oplus L'_1 = L_2$.

В арифметизированном виде задача выглядит следующим образом: заданы две матрицы, $(n \times d_1)$ -матрица K_1 и $(n \times d_2)$ -матрица K_2 ; обе — полного ранга по столбцам, причем $d_1 \leq d_2$ и $\text{rank}(K_1|K_2) = d_2$, т. е. конкатенация данных матриц имеет такой же ранг, что и K_2 . (Числа d_1 и d_2 имеют смысл размерностей данных подпространств, а условие на ранг конкатенации гарантирует тот факт, что первое подпространство содержится во втором.)

Решается эта задача элементарно: с помощью *элементарных преобразований над строками* матрица $(K_1|K_2)$ приводится к *ступенчатому* виду; в качестве *добавочных* берутся (в своем исходном виде) векторы из второй зоны, "проходящие через ступеньки".

Нам понадобится также несколько "усложненная" версия алгоритма, работающая в условиях, когда, кроме двух заданных подпространств K_1 и K_2 , задано еще одно — подпространство $K_0 \leq K_2$, *независимое* с подпространством K_1 , т. е. имеющее *тривиальное* (нулевое) пересечение с K_1 . В этой ситуации требуется найти такое прямое дополнение L'_1 к подпространству L_1 в подпространстве L_2 , которое содержало бы L_0 :

$$L_1 \leq L_2; L_0 \leq L_2; L_1 \cap L_0 = O; L_1 \oplus L'_1 = L_2; L_0 \leq L'_1.$$

Арифметизация "усложненной" версии задачи приводит к *трехзонной* конкатенации $(K_1|K_0|K_2)$, где средний блок представляет базис в подпространстве L_0 . Трехзонную матрицу также приводят к ступенчатому виду, после чего выбирают добавочные векторы из третьей зоны. Эти векторы записывают в матрицу K''_1 ; они составляют базис в некотором прямом дополнении L''_1 к прямой сумме $L_1 \oplus L_0$ в подпространстве L_2 (таким образом, получается равенство $(L_1 \oplus L_0) \oplus L''_1 = L_2$. или $L_1 \oplus L'_1 = L_2$, где $L'_1 = L_0 \oplus L''_1$). Искомая матрица, содержащая базис в L'_1 , формируется как двухзонная конкатенация: $K'_1 = (K_0|K''_1)$.

Следует еще отметить возможность встречи с *тривиальными* (нулевыми) дополнениями и *пустыми* матрицами. Так происходит, например, если $L_1 \oplus L_0 = L_2$; в этом случае дополнение $L''_1 = O$, а матрица K''_1 пуста (имеет размеры $n \times 0$).

Еще один особый случай: $L_2 = V$; здесь имеется возможность второй базис K_2 выбрать *естественным* (соответствующая матрица будет единичной: $K_2 = E$).

Теперь — к делу. Заготовки для столбчатых диаграмм "заселяются" векторами, начиная с верхнего этажа. Если этаж всего один ($l_i = 1$), то всё очень просто: никакой обработки базисов не требуется; корневое подпространство совпадает с собственным ($U_i = W_i$) и жордановым является любой базис.

Проще всего взять найденный ранее (см. этап 2) базис, записанный в матрицу $F_i^{(1)}$, т. е. положить $G_i = G_i^{(1)} = F_i^{(1)}$. Все жордановы ящики имеют в данном случае размер 1×1 ; диагональный блок J_i матрицы J' (см. этап 3) является *скалярной* матрицей: $J_i = \lambda_i E$ порядка $m_i = n_i$.

В случае $l_i \geq 2$ для каждого этажа столбчатой диаграммы \mathcal{D}_i , начиная с последнего ($k = l_i$) и заканчивая первым, требуется предъявить $(n \times p_i^{(k)})$ -матрицу $G_i^{(k)}$, содержащую (специальным образом выбранный) базис в прямом дополнении $C_i^{(k)}$ (обозначения вводились на предыдущем этапе). Алгоритм потребует также рассмотрения (на каждом этаже) *вспомогательного* линейного подпространства $D_i^{(k)}$ размерности $q_i^{(k)}$; базис этого подпространства будет храниться в матрице $H_i^{(k)}$. Подпространства $D_i^{(k)}$ будут соотноситься с *диаграммными ступеньками* (подробности — ниже).

На верхнем этаже произвольным образом выбирается прямое дополнение $C_i^{(l_i)}$ к предстабильному ядру $N_i^{(l_i-1)}$ в стабильном $N_i^{(l_i)}$. Базис в нем определяется с помощью алгоритма продолжения базиса (см. выше): двухзонная конкатенация фундаментальных матриц

$$\left(F_i^{(l_i-1)} \mid F_i^{(l_i)} \right) \quad (1.2.31)$$

приводится к ступенчатому виду; добавочные векторы из второй зоны составляют искомый базис; они записываются в матрицу $G_i^{(l_i)}$. Весь верхний этаж сводится к одной ступеньке, поэтому вспомогательное подпространство $D_i^{(l_i)}$ полагается совпадающим с $C_i^{(k)}$, а вспомогательная матрица $H_i^{(l_i)}$ — совпадающей с $G_i^{(l_i)}$ (напомним, что $q_i^{(l_i)} = p_i^{(l_i)}$).

Рассмотрим теперь произвольный этаж, отличный от верхнего и от нижнего ($2 \leq k \leq l_i - 1$), считая, что матрица $G_i^{(k+1)}$, содержащая базис в прямом дополнении $C_i^{(k+1)}$ уже вычислена. Требуется выбрать прямое дополнение $C_i^{(k)}$ так, чтобы удовлетворить условию (1.2.22), т. е. так, чтобы оно содержало образ при отображении ψ_i подпространства $C_i^{(k+1)}$. Согласно *теореме Фробениуса*, отображение ψ_i , будучи суженным на подпространство $C_i^{(k+1)}$, является *изоморфизмом* и, в частности, переводит

базис в этом подпространстве — снова в базис (уже — в образе).

В арифметизированной постановке задачи действие *смещенного оператора* $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$ задается умножением векторов слева на *смещенную матрицу* $B_i = A - \lambda_i E$; так что матрица-произведение $B_i \cdot G_i^{(k+1)}$ как раз и будет содержать базис в образе $\psi_i(C_i^{(k+1)})$, который является линейным подпространством в i -ом итерированном ядре $N_i^{(k)}$. По той же теореме Фробениуса указанное подпространство *независимо* с предыдущим ядром $N_i^{(k-1)}$ (т. е. $\psi_i(C_i^{(k+1)}) \cap N_i^{(k-1)} = O$).

Таким образом, требуется применение "усложненной" версии алгоритма продолжения базиса. Рассмотрим трехзонную конкатенацию

$$\left(F_i^{(k-1)} \mid B_i \cdot G_i^{(k+1)} \mid F_i^{(k)} \right), \quad (1.2.32)$$

приведем ее к ступенчатому виду, выберем по ступенькам в третьей зоне добавочные векторы и составим из них матрицу $H_i^{(k)}$; число столбцов в этой матрице будет равняться $q_i^{(k)}$ и она будет представлять базис во вспомогательном линейном подпространстве $D_i^{(k)}$, являющемся прямым дополнением к прямой сумме $N_i^{(k-1)} \oplus \psi_i(C_i^{(k+1)})$ в подпространстве $N_i^{(k)}$.

Последний факт выражается следующим равенством (в котором мы производим еще и перегруппировку слагаемых):

$$N_i^{(k)} = (N_i^{(k-1)} \oplus \psi_i(C_i^{(k+1)})) \oplus D_i^{(k)} = N_i^{(k-1)} \oplus C_i^{(k)}, \quad (1.2.33)$$

где

$$C_i^{(k)} = \psi_i(C_i^{(k+1)}) \oplus D_i^{(k)} \quad (1.2.34)$$

— искомое k -е прямое дополнение. Базис в подпространстве (1.2.34) будет содержаться в матрице-конкатенации

$$G_i^{(k)} = \left(B_i \cdot G_i^{(k+1)} \mid H_i^{(k)} \right). \quad (1.2.35)$$

Этим завершается описание *шага вниз*, с $(k+1)$ -го этажа на k -й.

Выполнение данного шага очень серьезно упрощается в случае, когда на k -ом этаже *отсутствует ступенька* ($q_i^{(k)} = 0$). Тогда вспомогательное пространство $D_i^{(k)}$ тривиально, вспомогательная матрица $H_i^{(k)}$ пуста, а формула (1.2.35) сводится к

$$G_i^{(k)} = B_i \cdot G_i^{(k+1)}. \quad (1.2.35a)$$

Нам осталось описать спуск со второго этажа на первый. Случай $k = 1$ проще общего случая за счет того, что "ниже первого этажа ничего нет"

(итерированное ядро с нулевым номером тривиально). Так что конкатенация (1.2.32) упрощается до двухзонной

$$\left(B_i \cdot G_i^{(2)} \mid F_i^{(1)} \right); \quad (1.2.36)$$

формулы (1.2.33) и (1.2.34) сводятся к

$$N_i^{(1)} = C_i^{(1)} = \psi_i(C_i^{(2)}) \oplus D_i^{(1)}, \quad (1.3.37)$$

а формула (1.2.35) — к

$$G_i^{(1)} = \left(B_i \cdot G_i^{(2)} \mid H_i^{(1)} \right); \quad (1.2.38)$$

замечание о случае отсутствия ступеньки сохраняет силу.

Завершается четвертый этап формированием (с учетом нумерации ячеек столбчатых диаграмм) матриц G_i , содержащих жордановы базисы во всех корневых подпространствах U_i ($i = 1, \dots, s$), и составляемой из них $(n \times m')$ -матрицы G' , представляющей жорданов базис в корневой сумме $U' = Q(\varphi)$.

Э т а п 5. Ф о р м и р о в а н и е о к о н ч а т е л ь н ы х о т в е т о в

В случае наличия **полного жорданова базиса** для линейного оператора φ полный ответ готов уже к исходу четвертого этапа. В самом деле, при $m' = n$ корневая сумма является полной ($U' = V$), матрица $G = G'$ является квадратной и содержит *жорданов базис* для φ во всем пространстве $V = P^n$. Матрица $J = J'$ имеет размер $n \times n$ и *жорданову нормальную форму*; она отвечает оператору φ в найденном жордановом базисе. Обратите внимание на привязку полученных результатов к той конкретной *арифметизации* задачи, которая была произведена перед "включением" алгоритма.

Данное линейное пространство V было отождествлено с арифметическим линейным пространством P^n , причем осуществлялось это с помощью отождествления некоторого (исходного) базиса \mathcal{B} в пространстве V с *естественным базисом* в P^n .

Жорданов базис в ответе представлен векторами-столбцами матрицы G . С более общей точки зрения (привязанной к исходным объектам) эта матрица есть не что иное, как *матрица перехода* от базиса \mathcal{B} к жорданову базису \mathcal{G} . В § 1.1 эта матрица обозначалась буквой T . Матрица A ,

отвечающая φ в базисе \mathcal{B} , и матрица J , отвечающая φ в базисе \mathcal{G} , связаны соотношением (1.1.5). У нас $T = G$, и это соотношение,

$$J = G^{-1}AG, \quad (1.2.39)$$

можно было бы использовать для **проверки** полученных результатов.

Есть, однако, несколько более удобный способ: если предварительно установить *невырожденность* матрицы G (установив справедливость равенства $\text{rank}(G) = n$, или же — справедливость неравенства $\det(G) \neq 0$), то проверку (1.2.39) можно заменить проверкой (равносильного, но не содержащего операции *обращения* матрицы) соотношения $GJ = AG$.

В случае наличия лишь **частичного жорданова базиса** ($m' < n$), по завершении четвертого этапа мы получаем $(n \times m')$ -матрицу G' , содержащую жорданов базис для φ в корневой сумме U' , и имеющую жорданову нормальную форму $(m' \times m')$ -матрицу J' , которая отвечает сужению $\varphi' = \varphi|_{U'}$. Напомним, что корневая сумма является φ -инвариантным подпространством; именно поэтому сужение линейного оператора (эндоморфизма) на это подпространство снова приводит к линейному эндоморфизму.

Теперь мы поставим перед собой задачу *продолжить* найденный частичный жорданов базис до базиса во всём пространстве, причем — "по возможности оптимальным" образом. Под этим подразумевается следующее: применение алгоритма продолжения базиса (см. начало предыдущего этапа) приводит к построению некоторого *прямого дополнения* к данному линейному подпространству, не обязанного, вообще говоря, быть φ -инвариантным. А мы хотим построить φ -инвариантное дополнение U'' к корневой сумме U' . Сделав это и определив матрицу G'' размера $n \times (n - m')$, содержащую какой-либо базис \mathcal{G}'' в U'' , мы получим $(n \times n)$ -матрицу

$$G = (G'|G''), \quad (1.2.40)$$

содержащую так называемый *частично жорданов базис* $\mathcal{G} = [\mathcal{G}', \mathcal{G}'']$ во всём пространстве. В базисе \mathcal{G} оператору φ будет соответствовать блочно-диагональная матрица

$$J = \text{diag}(J', J''), \quad (1.2.41)$$

где блок J' получен по завершении третьего этапа и имеет жорданову нормальную форму, а блок J'' отвечает сужению $\varphi'' = \varphi|_{U''}$ и не имеет характеристических корней в данном поле.

Разумеется, связь между матрицами A и J в данном случае, как и в предыдущем, выражается формулой (1.2.39), однако теперь роль этой

формулы будет совершенно иной: она потребуется не для проверки, а для прямого вычисления матрицы J .

Другого способа вычислить блок J'' не будет. О правильности проделанных вычислений в данном случае будет свидетельствовать "получающаяся сам-собой" блочно-диагональная структура матрицы J и (также "получающийся сам-собой") северо-западный блок этой матрицы, который должен в точности совпасть с ранее найденной матрицей J' .

Приступаем к описанию практического способа отыскания инвариантного дополнения U'' . (Обоснование излагаемого ниже метода можно найти, например, в [7, с. 61].)

Нам понадобится не имеющий корней в поле P множитель $g(\lambda)$ в разложении (1.2.3) характеристического многочлена $h_A(\lambda)$. Он является нормализованным многочленом степени (по предположению — положительной) $r = n - m'$:

$$g(\lambda) = \lambda^r + \beta_1 \lambda^{r-1} + \dots + \beta_{r-1} \lambda + \beta_r. \quad (1.2.42)$$

Подставим в многочлен (1.2.42) вместо переменной λ данную матрицу A :

$$g(A) = A^r + \beta_1 A^{r-1} + \dots + \beta_{r-1} A + \beta_r E. \quad (1.2.43)$$

В качестве U'' можно выбрать *нуль-пространство* (ядро) матрицы (1.2.43);

$$U'' = L_{g(A)}^0 = \{\bar{x} \in P^n : g(A) \cdot \bar{x} = \bar{0}\}. \quad (1.2.44)$$

Решая фигурирующую в описании (1.2.44) однородную систему линейных уравнений, находим соответствующую *фундаментальную матрицу*; именно она принимается за G'' и мы приходим к описанию подпространства (1.2.45) вторым способом:

$$U'' = R_{G''}. \quad (1.2.45)$$

И в этом случае (как и в случае *полного* жорданова базиса) мы можем трактовать матрицу (1.2.40) как *матрицу перехода* ($T = G$), на этот раз: от исходного базиса — к *частично жорданову*.

В обоих случаях алгоритм выдает пару квадратных матриц: J и T .

Для лучшей ориентации в материале мы приводим ниже таблицу, содержащую сводку основных обозначений, используемых в настоящем руководстве.

Таблица 1.1

Подпространства и базисы

Подпространства в линейном пространстве	Матрицы, содержащие базисы
O ; нулевое подпространство	[]; $n \times 0$; пустой базис
$V = P^n$; все пространство	E ; $n \times n$; естественный базис
$W_i = S_{\lambda_i}(\varphi) = N_i^{(1)} = \text{Ker}(\psi_i)$ — собственное подпространство для линейного оператора φ , отвечающее собственному значению λ_i	$F_i^{(1)}$; $n \times n_i$; необработанный базис в подпространстве W_i ($n_i = d_i^{(1)}$ — геометрическая кратность собственного значения λ_i)
$N_i^{(k)} = \text{Ker}(\psi_i^k)$ — k -е итерированное ядро смещенного оператора $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$	$F_i^{(k)}$; $n \times d_i^{(k)}$; необработанный базис в k -м итерированном ядре ($d_i^{(k)}$ — k -й итерированный дефект оператора ψ_i)
$U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi) = N_i^{(l_i)} = \text{Ker}(\psi_i^{l_i})$ — корневое подпространство для линейного оператора φ , отвечающее собственному значению λ_i (стабильное ядро оператора ψ_i ; l_i — показатель стабилизации)	$F_i^{(l_i)}$; $n \times m_i$; необработанный базис в подпространстве U_i ($m_i = d_i^{(l_i)}$ — алгебраическая кратность собственного значения λ_i)

<p>$C_i^{(k)}$ — прямое дополнение к предыдущему ядру $N_i^{(k-1)}$ в текущем ядре $N_i^{(k)}$ ($N_i^{(k)} = N_i^{(k-1)} \oplus C_i^{(k)}$)</p>	<p>$G_i^{(k)}$; $n \times p_i^{(k)}$; базис в k-м дополнении $C_i^{(k)}$ ($p_i^{(k)} = d_i^{(k)} - d_i^{(k-1)}$) — приращения итерированных дефектов для оператора ψ_i)</p>
<p>$D_i^{(k)}$ — прямое дополнение к образу $\psi_i(C_i^{(k+1)})$ следующего дополнения в текущем дополнении $C_i^{(k)}$ ($C_i^{(k)} = \psi_i(C_i^{(k+1)}) \oplus D_i^{(k)}$)</p>	<p>$H_i^{(k)}$; $n \times q_i^{(k)}$; базис в подпространстве $D_i^{(k)}$ ($q_i^{(k)} = p_i^{(k)} - p_i^{(k+1)}$) — вторые абсолютные приращения итерированных дефектов для ψ_i)</p>
<p>$U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi) = \text{Ker}(\psi_i^{l_i})$ — корневое подпространство для линейного оператора φ, отвечающее собственному значению λ_i</p>	<p>G_i; $n \times m_i$; жорданов базис в корневом подпространстве U_i; описывается столбчатой диаграммой \mathcal{D}_i (m_i — алгебраическая кратность собственного значения λ_i)</p>
<p>$U' = Q(\varphi) = U_1 \oplus \dots \oplus U_s$ — корневая сумма для линейного оператора φ (прямая сумма всех корневых подпространств)</p>	<p>$G' = (G_1 \dots G_s)$; $n \times m'$; жорданов базис в корневой сумме U' ($m' = m_1 + \dots + m_s$) — сумма алгебраических кратностей всех собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ для линейного оператора φ)</p>

U'' — φ -инвариантное прямое дополнение к корневой сумме $U' = Q(\varphi)$	G'' ; $n \times m''$; базис в подпространстве U'' $(m'' = n - m')$
$V = U' \oplus U''$ — все пространство;	$G = (G' G'')$; $n \times n$; (частично) жорданов базис во всем пространстве V
Если $m' = n$, то $U'' = O$, корневая сумма является полной: $U' = V$	$G = G'$; $n \times n$; полный жорданов базис в пространстве V

Глава 2

ПАКЕТ Maple – ПРОЦЕДУР LinAlgJ (ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА НАД ПОЛЕМ Q)

Мощность и универсальный характер компьютерной алгебраической системы **Maple** могут в некоторых *обучающих* задачах приводить к нежелательным последствиям, затрудняющим пошаговое изучение алгоритмов.

Например, одной из ключевых задач курса линейной алгебры является вычисление *базиса в нуль-пространстве* матрицы A , т. е. определение *базисных частных решений однородной системы линейных уравнений* $A \cdot \bar{x} = \bar{0}$. При решении этой задачи студент должен привести матрицу A к *виду Жордана – Гаусса* A' (используя, скажем, **Maple**-процедуру **ReducedRowEchelonForm**), а затем решить систему $A' \cdot \bar{x} = \bar{0}$, равносильную исходной, и выписать *фундаментальную матрицу*, содержащую искомый базис.

При попытке проверки решения с помощью команды **NullSpace**, скорее всего, будет получен другой базис (**Maple** "умнее" первокурсника: большинство команд используют алгоритмы, гораздо более совершенные и универсальные, чем это требуется на первоначальном этапе обучения).

Автору показалось уместным смоделировать "студенческую" прямолинейную логику решения, "ухудшив" (в смысле: упростив) алгоритм до уровня доступного пониманию "свежих людей" (*freshmen*).

Так возник специализированный пакет **LinAlgJ**, содержащий упрощенные версии ключевых процедур модуля **LinearAlgebra**, а также обучающую процедуру-сценарий **JRD**, обеспечивающую приведение квадратной матрицы к *жордановой нормальной форме*.

Заметим, что загрузка модуля **LinearAlgebra** должна предшествовать загрузке пакета **LinAlgJ**, поскольку последний использует тип '**Matrix**', а также ряд (служебных) процедур из указанного модуля.

Процедуры представляемого пакета работоспособны в случае, когда элементы матриц имеют числовой тип. (Напомним, что реально рассматриваются только задачи над полем рациональных чисел.)

Ниже приводится таблица соответствия стандартных процедур и их специализированных модификаций.

Таблица 2.1

**Имена стандартных и модифицированных
процедур линейной алгебры**

LinearAlgebra	LinAlgJ
GaussElimination ReducedRowEchelonForm LinearSolve NullSpace ColumnSpace	Gauss JordanGauss LinSolve NullSpaceBasis ColSpaceBasis

§ 2.1. Вспомогательные процедуры пакета LinAlgJ

В настоящем параграфе приводятся подробно откомментированные коды пяти вспомогательных процедур представляемого пакета.

Загрузка модуля **LinearAlgebra**.

```
> restart;with(LinearAlgebra) :
```

2.1.1. Процедура Gauss. Приведение матрицы к ступенчатому виду

```
> LinAlgJ[Gauss] := proc (A :: Matrix)
  local AG, m, n, i, j, h, colindic, rank;

  m := RowDimension(A) ; n := ColumnDimension(A) ;
  AG := Matrix(A) ;
  # Рабочая копия матрицы A.
  rank := 0 ;
```

```
# Начало подсчета ранга матрицы.
colindic:=array(1..n);
for j from 1 to n do
  colindic[j]:=0;
od;
# Введен и заполнен нулями
# массив-индикатор главных (ключевых)
# и свободных столбцов.
# При обнаружении ключевого столбца
# в соответствующую позицию массива
# ставится единица.
h:=1;
# Номер текущей строки.
for j from 1 to n do
  # Просматриваем столбцы матрицы A.
  if IsMatrixShape(SubMatrix(AG,h..m,j..j),zero) then
    if j<n then
      next;
      # "Проскок" свободного столбца
      # происходит, если в текущем столбце
      # во всех строках,
      # начиная с текущей,
      # находятся нули.
    else
      break;
      # "Останов" по достижении последнего столбца.
    fi;
  else
    colindic[j]:=1;
    # Метка главного (ключевого) столбца.
    rank:=rank+1;
    # Накопление ранга.
    i:=h;
    while AG[i,j]=0 and i<m do
      i:=i+1;
      # Просмотр текущего ключевого столбца
      # (начиная с текущей строки)
      # вплоть до обнаружения первого
      # ненулевого элемента.
    od;
    if i<>h then
```

```

AG:=RowOperation(AG, [h,i]);
# Если "ключевая позиция"
# уже занята ненулевым элементом,
# то ничего не происходит.
# Если же в этой позиции был 0,
# то текущая строка переставляется
# с обнаруженной строкой,
# содержащей в текущем ключевом столбце
# ненулевой элемент.
# Этот элемент становится ключевым.
fi;
if h<m then
  for i from h+1 to m do
    AG:=RowOperation(AG, [i,h], -AG[i,j]/AG[h,j]);
  od;
  # Если текущая строка не последняя,
  # то производится обнуление ключевого столбца
  # под ключевой единицей.
  fi;
fi;
if h<m then
  h:=h+1;next;
  # Переход к обработке следующей строки.
else
  break;
  # "Останов" по достижении последней строки.
fi;
od;
RETURN(AG,eval(colindic),rank);
# Возвращаются: матрица AG - ступенчатый вид матрицы A,
# массив-индикатор colindic
# и ранг rank матрицы A.
end proc;

```

2.1.2. Процедура JordanGauss. Приведение матрицы к виду Жордана - Гаусса

```

> LinAlgJ[JordanGauss] :=proc (A::Matrix)
  local AG,m,n,i,j,h,colindic,rank;

```

```
m:=RowDimension(A); n:=ColumnDimension(A);
AG:=Matrix(A);
# Рабочая копия матрицы A.
rank:=0;
# Начало подсчета ранга матрицы.
colindic:=array(1..n);
for j from 1 to n do
  colindic[j]:=0;
od;
# Введен и заполнен нулями
# массив-индикатор главных (ключевых)
# и свободных столбцов.
# При обнаружении ключевого столбца
# в соответствующую позицию массива
# ставится 1.
h:=1;
# Номер текущей строки.
for j from 1 to n do
  # Просматриваем столбцы матрицы A.
  if IsMatrixShape(SubMatrix(AG,h..m,j..j),zero) then
    if j<n then
      next;
      # "Проскок" свободного столбца
      # происходит, если в текущем столбце
      # во всех строках, начиная с текущей,
      # находятся нули.
    else
      break;
      # "Останов" по достижении последнего столбца.
    fi;
  else
    colindic[j]:=1;
    # Метка главного (ключевого) столбца.
    rank:=rank+1;
    # Накопление ранга.
    i:=h;
    while AG[i,j]=0 and i<m do
      i:=i+1;
      # Просмотр текущего ключевого столбца
      # (начиная с текущей строки)
      # вплоть до обнаружения первого
```

```

    # ненулевого элемента.
od;
if i<>h then
  AG:=RowOperation(AG, [h,i]);
  # Если "ключевая позиция"
  # уже занята ненулевым элементом,
  # то ничего не происходит.
  # Если же в этой позиции был 0,
  # то текущая строка переставляется
  # с обнаруженной строкой,
  # содержащей в текущем ключевом столбце
  # ненулевой элемент.
  # Этот элемент становится ключевым.
fi;
AG:=RowOperation(AG, h, 1/AG[h,j]);
# Умножение ключевой строки
# на элемент, обратный ключевому элементу.
if h<m then
  for i from h+1 to m do
    AG:=RowOperation(AG, [i,h], -AG[i,j]);
  od;
  # Если текущая строка не последняя,
  # то производится обнуление ключевого столбца
  # под ключевой единицей.
fi;
if h>1 then
  for i from 1 to h-1 do
    AG:=RowOperation(AG, [i,h], -AG[i,j]);
  od;
fi;
# Если текущая строка не первая,
# то производится обнуление ключевого столбца
# над ключевой единицей.
fi;
if h<m then
  h:=h+1;next;
  # Переход к обработке следующей строки.
else
  break;
  # "Останов" по достижении последней строки.
fi;

```

```

od;
RETURN (AG, eval (colindic) , rank) ;
# Возвращаются: матрица AG -
# вид Жордана-Гаусса матрицы A,
# массив-индикатор colindic и ранг rank матрицы A.
end proc;

```

2.1.3. Процедура LinSolve. Решение системы линейных уравнений

Рассматривается система линейных уравнений $Ax = b$. Число строк в матрице A должно равняться размерности вектора b .

Пусть m - количество строк в матрице A , n - количество столбцов, r - ранг матрицы A .

В случае *однородной* системы ($b = 0$) возвращаются:

(1) *фундаментальная матрица fu*, содержащая $n - r$ столбцов - *базисных частных решений* однородной системы [в случае $r = n$ выводится *пустой массив*, система имеет *только нулевое решение*];

(2) *общее решение gensol* - матрица-столбец, содержащая выражения всех неизвестных через $n - r$ *свободных* неизвестных [в случае $r = n$ этот столбец нулевой].

В случае *неоднородной* системы:

- если система - *несовместная*, то возвращается *пустой массив*;

- если система - *совместная* и *определенная*, то возвращается матрица-столбец *op* – *единственное решение* системы;

- если система - *совместная* и *неопределенная*, то возвращаются:

(1) список [*fu, op*], содержащий

(1.1) *фундаментальную матрицу fu* для соответствующей однородной системы;

(1.2) *опорное частное решение op* для неоднородной системы;

(2) *общее решение gensol* - матрица-столбец, содержащая выражения всех неизвестных через $n - r$ *свободных* неизвестных

```

> LinAlgJ[LinSolve] :=proc (A::Matrix, b::Vector)
  local Ab, m, n, m1, i, j, h, J, colindic, r,
    fr, pr, x, fu, op, gensol;

```

```

m:=RowDimension(A);
n:=ColumnDimension(A);m1:=Dimension(b);
if m<>m1 then
  ERROR("Размеры матрицы и вектора
        должны быть согласованы!");
fi;
x:=array(1..n);
# Массив, составленный из имен неизвестных
# (используется при записи общего решения).
if IsVectorShape(b,zero) then
  # Случай однородной системы.
  gensol:=Matrix(n,1);
  # Вводится (нулевая) заготовка для
  # матрицы-столбца gensol,
  # являющегося общим решением однородной системы.
  J,colindic,r:=LinAlgJ[JordanGauss](A);
  # Вычисляются: вид Жордана-Гаусса J для матрицы A;
  # массив-индикатор
  # главных/свободных столбцов colindic;
  # ранг r=rank(A).
  if r=n then
    fu:=[];
    # Однородная система имеет
    # только нулевое решение;
    # фундаментальная матрица считается пустой.
  else
    # Случай r<n.
    fr:=[];pr:=[];
    for j from 1 to n do
      if colindic[j]=0 then
        fr:=[fr[],j];
      else
        pr:=[pr[],j];
      fi;
    od;
    # Сформированы:
    # список номеров свободных столбцов fr
    # и список номеров главных столбцов pr.
    fu:=Matrix(n,n-r);
    # Заготовка (нулевая) для фундаментальной матрицы.
    for h from 1 to n-r do

```

```

    fu[fr[h],h]:=1;
od;
# В строке матрицы fu с номером fr[h],
# отвечающей свободной неизвестной x[fr[h]],
# проставляется одна единица
# (в столбце с номером h).
for i from 1 to r do
    for h from 1 to n-r do
        fu[pr[i],h]:=-J[i,fr[h]];
    od;
od;
# В строке матрицы fu с номером pr[i],
# отвечающей главной неизвестной x[pr[i]],
# проставляются взятые с противоположным знаком
# элементы матрицы J из ее строки с номером i,
# (из всех n-r ее свободных столбцов).
# Сформирована фундаментальная матрица fu
# однородной системы.
# Начинается формирование матрицы-столбца gensol.
for j from 1 to n do
    for h from 1 to n-r do
        gensol[j,1]:=gensol[j,1]+fu[j,h]*x[fr[h]];
    od;
od;
# Элемент gensol[j,1] представляет собой
# выражение неизвестной x[j] через
# свободные неизвестные x[fr[h]], h=1,...,n-r.
# Сформировано общее решение однородной системы.
fi;
RETURN(fu,gensol);
# Возвращаются две матрицы: fu (возможно - пустая)
# и gensol (возможно - нулевая).
else
# Случай неоднородной системы.
Ab:=<A|b>;
# Формируется расширенная матрица системы
# Ab=(A|b), содержащая n+1 столбец.
J,colindic,r:=LinAlgJ[JordanGauss](Ab);
# Вычисляются: вид Жордана-Гаусса J для матрицы Ab;
# массив-индикатор
# главных/свободных столбцов colindic;

```

```

# ранг  $r = \text{rank}(Ab)$ .
if colindic[n+1]=1 then
  RETURN([]);
  # Если  $(n+1)$ -й столбец матрицы  $Ab$  оказывается
  # в числе главных, то система несовместна.
  # Возвращается пустой массив.
elif colindic[n+1]=0 and r=n then
  op:=SubMatrix(J,1..n,n+1..n+1);
  RETURN(op);
  # В случае, когда  $(n+1)$ -й столбец матрицы  $J$ 
  # является свободным и ранг  $r = \text{rank}(A)$ 
  # совпадает с числом неизвестных  $n$ ,
  # неоднородная система является определенной
  # и ее единственное решение  $op$ 
  # считывается из упомянутого столбца
  # и возвращается.
else
  # Случай неопределенной неоднородной системы.
  fr:=[];pr:=[];
  for j from 1 to n do
    if colindic[j]=0 then
      fr:=[fr[],j];
    else
      pr:=[pr[],j];
    fi;
  od;
  # Сформированы: список свободных столбцов  $fr$ 
  # и список главных столбцов  $pr$ .
  fu:=Matrix(n,n-r);op:=Matrix(n,1);
  # Заготовки (нулевые)
  # для фундаментальной матрицы  $fu$ 
  # (соответствующей однородной системы)
  # и матрицы-столбца  $op$  -
  # опорного частного решения.
  for h from 1 to n-r do
    fu[fr[h],h]:=1;
  od;
  # В строке матрицы  $fu$  с номером  $fr[h]$ ,
  # отвечающей свободной неизвестной  $x[fr[h]]$ ,
  # проставляется одна единица
  # (в столбце с номером  $h$ ).

```

```

for i from 1 to r do
  for h from 1 to n-r do
    fu[pr[i],h]:=-J[i,fr[h]];
  od;
  op[pr[i],1]:=J[i,n+1];
od;
# В строке матрицы fu с номером pr[i],
# отвечающей главной неизвестной x[pr[i]],
# проставляются взятые с противоположным знаком
# элементы матрицы J из ее строки с номером i,
# (из всех n-r ее свободных столбцов).
# В строке матрицы op с номером fr[h],
# отвечающей свободной неизвестной x[fr[h]],
# остается 0.
# В строке матрицы op с номером pr[i],
# отвечающей главной неизвестной x[pr[i]],
# помещается элемент из последнего столбца
# матрицы J из ее строки с номером i.
# Сформированы матрицы fu и op.
gensol:=Matrix(n,1);
# Формируется матрица-столбец, являющаяся
# общим решением неоднородной системы.
for j from 1 to n do
  gensol[j,1]:=op[j,1];
  # Начальное значение матрицы gensol
  # совпадает с опорным решением op.
  for h from 1 to n-r do
    gensol[j,1]:=gensol[j,1]+fu[j,h]*x[fr[h]];
  od;
od;
# Элемент gensol[j,1] представляет собой
# выражение неизвестной x[j]
# через свободные неизвестные
# x[fr[h]], h=1,...,n-r.
fi;
fi;
RETURN([fu,op],gensol);
# Возвращаются:
# 1) список из двух матриц:
#   fu - фундаментальная матрица
#   соответствующей однородной системы;

```

```

#   op - опорное частное решение
#   неоднородной системы;
# 2) матрица-столбец gensol - общее решение
#   неоднородной системы.
end proc;

```

2.1.4. Процедура ColSpaceBasis. Отыскание базиса и размерности для образа матрицы

Рассматривается образ матрицы **A**, т. е. линейная оболочка ее векторов-столбцов.

Возвращаются: подматрица **B** матрицы **A**, содержащая базисные столбцы, и размерность **dim** этой оболочки [равная рангу **rank(A)**].

```

> LinAlgJ[ColSpaceBasis] := proc (A :: Matrix)
  local m,n,pr,i,j,colindic,dim,B;

m:=RowDimension(A); n:=ColumnDimension(A);
colindic,dim:=LinAlgJ[Gauss](A)[2..3];
# К матрице A применяется процедура Gauss,
# причем из возвращаемых данных берутся только
# индикатор главных/свободных столбцов
# и ранг матрицы.
pr:=[];
for j from 1 to n do
  if colindic[j]=1 then
    pr:=[pr[],j];
  fi;
od;
# Сформирован список номеров главных столбцов pr.
B:=SubMatrix(A,1..m,pr);
RETURN(B,dim);
# Возвращаются: матрица B,
# содержащая базисные столбцы матрицы A,
# и размерность линейной оболочки столбцов A.
end proc;

```

2.1.5. Процедура `NullSpaceBasis`. Отыскание базиса и размерности для ядра (нуль-пространства) матрицы

Рассматривается ядро нуль-пространство для матрицы A , т. е. - подпространство решений однородной системы линейных уравнений $Ax = 0$.

Возвращаются: фундаментальная матрица, соответствующая указанной системе и содержащая базис в нуль-пространстве, а также размерность *dim* этого пространства.

```
> LinAlgJ[NullSpaceBasis] := proc (A :: Matrix)
  local m, n, b, dim, F;

  m := RowDimension(A); n := ColumnDimension(A);
  b := Vector(m, shape=zero);
  # Вводится нулевой столбец правых частей
  # системы линейных уравнений  $Ax=0$ .
  F := LinAlgJ[LinSolve](A, b)[1];
  # К матрице  $A$  и нулевому столбцу  $b=0$ 
  # применяется процедура LinSolve,
  # причем из возвращаемых данных
  # берется лишь фундаментальная матрица,
  # содержащая базис
  # в нуль-пространстве матрицы  $A$ .
  dim := ColumnDimension(F);
  # Вычисляется размерность нуль-пространства.
  RETURN(F, dim);
  # Возвращаются:
  # фундаментальная матрица  $F$ ,
  # содержащая базис
  # в нуль-пространстве матрицы  $A$ ,
  # и размерность нуль-пространства.
end proc;
```

§ 2.2. Процедура – сценарий JRD

В настоящем параграфе приводится код процедуры-сценария **JRD**, решающей задачу приведения к (возможно - частичной) жордановой нормальной форме квадратной матрицы над полем \mathbf{Q} .

Сценарный характер процедуры выражается в том, что она по ходу работы сообщает пользователю обо всех промежуточных действиях и выдает все промежуточные результаты.

Делается это посредством вывода информации на *печать* (с помощью **Maple**-команды **print**).

Синтаксис этой команды предусматривает при включении в *фиксированный текст* вычисляемых значений переменных разделение указанных (разно-родных) фрагментов *запятыми*, что почти никогда не сочетается с привычным "человеческим" синтаксисом. В связи с этим мы организуем *печать в (одно-строчные) матрицы*, ячейки которых не разделяются запятыми. Необходимые знаки препинания ставятся в соответствии с законами "человеческой" грамматики.

Собственно текст процедуры (без `print`'ов) набирается далее **полужирным** шрифтом, а команды вывода на печать – обычным. (Кстати, это позволяет читателю видеть, насколько вычислительная часть процедуры лаконичнее комментария. Кроме того, других пояснений к программе, помимо содержания печати, очевидно, не требуется.) Отметим еще использование строки из дефисов **str** в качестве логического разделителя для массивов выводимой информации.

Более подробных разъяснений требует перевод на **Maple**-язык достаточно сложных обозначений, применявшихся в предыдущей главе (см. табл. 1.1).

Некоторые из этих обозначений носят сугубо теоретический характер и используются лишь в текстовых комментариях; например: *утерированные ядра* $N_i^{(k)}$ для смещенных линейных эндоморфизмов $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$, прямые дополнения $C_i^{(k)}$ к предыдущему ядру в текущем и т. д. Другие реально фигурируют в процедуре в качестве переменных; например: матрицы $F_i^{(k)}$ и $G_i^{(k)}$, содержащие соответственно "необработанные" и "обработанные" базисы в подпространствах $N_i^{(k)}$; *утерированные дефекты* $d_i^{(k)}$, их первые $p_i^{(k)}$ и вторые $q_i^{(k)}$ *приращения* и т. д.

В обоих случаях **Maple**-язык (без дополнительных "ухищрений") не позволяет использовать *верхние индексы* (да еще в скобках!); приходится вводить *дважды индексированные* переменные типа $F[i][k]$ (так они выглядят при запи-

си кода; при выдаче на печать пользователь видит: $F_{i_k}^{\cdot}$; верхний индекс становится *нижним субиндексом*). Наиболее громоздкими оказываются обозначения, относящиеся к *стабильным* объектам, по достижении индексом k (*номером итерации*) значения $k = l_i$ (*равного показателю стабилизации для ψ_i*): матрица $F_i^{(l_i)}$, содержащая (необработанный) базис в стабильном ядре (*корневом подпространстве*) $U_i = N_i^{(l_i)}$, получает кодовое обозначение F[i][I[i]]; на печати оно выглядит как $F_{i l_i}$.

Теперь можно читать код.

```
> LinAlgJ[JRD] := proc (A :: 'Matrix' (square, rational))
  local n, E, i, j, k, u, v, t, h, hf, h1, g,
        hroots, s, lambda, m, ms, exist_jbas,
        B, BGJ, d, F, l, p, q, DIAGR, RIS,
        jlist, num, JS, J,
        M, MG, MB, mb, H, G,
        GS, gA, BY, K, T, dt, str;
  str := `-----`;
  n := RowDimension (A);
  print (Matrix (1, 3, [``, `Введена матрица A с рациональными
    элементами`, ``]));
  print (Matrix (1, 4, [``, `Размер матрицы: `,
    'n'=n, ``.``]));
  print (Matrix (1, 4, [``, `Матрице A отвечает линейный
    оператор`, phi, `,``]));
  print (Matrix (1, 4, [``, `действующий в линейном
    пространстве размерности`, n, ``]));
  print (Matrix (1, 3, [``, `над полем Q.`, ``]));
  print (``);
  E := IdentityMatrix (n);
  exist_jbas := true;
  h := sort (CharacteristicPolynomial (A, t));
  print (Matrix (1, 3, [``, `Характеристический
    многочлен:`, ``]));
  print ('h(lambda) '=subs (t=lambda, h));
  hroots := roots (h);
  hf := factor (h);
  print (Matrix (1, 3, [``, `Разложение
    характеристического многочлена`, ``]));
```

```

print(Matrix(1,3,[``, `на неприводимые
    множители:`, ``]));
print('h(lambda) '=subs(t=lambda,hf));
if hroots=[] then
    ERROR(`Пустой спектр!`);
fi;
s:=nops(hroots);
print(Matrix(1,4,[``, `Мощность спектра:`, 's'=s, `.`]));
lambda:=array(1..s);m:=array(1..s);
print(Matrix(1,3,[``, `Собственные значения`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `и их алгебраические
    кратности:`, ``]));
for i from 1 to s do
    lambda[i]:=hroots[i][1];m[i]:=hroots[i][2];
    print(evaln(lambda[i])=lambda[i],evaln(m[i])=m[i]);
od;
print(str);
ms:=sum('m[j]',j=1..s);
print(Matrix(1,3,[``, `Сумма алгебраических
    кратностей`, ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `собственных значений:`,
    evaln(ms)=ms, `.`]));
if ms<n then
    exist_jbas:=false;
    print(Matrix(1,3,[``, `Не существует полного
        жорданова базиса,`, ``]));
    print(Matrix(1,3,[``, `только частичный.`, ``]));
    h1:=product('(t-lambda[j])^m[j]',j=1..s);
    h1:=sort(expand(h1),t);
    g:=sort(expand(normal(hf/h1)),t);
    print(``);
    print(Matrix(1,3,[``, `Множитель характеристического
        многочлена,`, ``]));
    print(Matrix(1,3,[``, `не имеющий корней в поле Q:`,
        ``]));
    print(evaln(g(lambda))=subs(t=evaln(lambda),g));
else
    print(Matrix(1,3,[``, `Полный жорданов базис
        существует.`, ``]));
fi;
print(str);

```

```

B:=array(1..s);
BGJ:=array(1..s);
d:=array(1..s);
F:=array(1..s);
l:=array(1..s);
i:='i';k:='k';
print(Matrix(1,3,[``, `Далее, в цикле по номеру i
    собственного значения,`, ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `вычисляются степени (итерации)`,
    evaln(B['i']['k'])=parse('(B[i])^k'), ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `матрицы`,
    parse('B[i]') ='A'-evaln(lambda['i'])*evaln(E),
    `,`]));
print(Matrix(1,4,[``, `где k изменяется от 1 и
    (не далее чем) до`, evaln(m[i]), `.`]));
print(Matrix(1,3,[``, `Затем эти матрицы
    приводятся`, ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `к виду Жордана-Гаусса`,
    evaln(BGJ['i']['k']), `,`]));
print(Matrix(1,3,[``, `после чего вычисляются
    фундаментальные матрицы`, ``]));
print(Matrix(1,4,[``, evaln(F['i']['k']), `,
    содержащие базисы,`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `называемые необработанными,`,
    ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `в итерированных ядрах`,
    evaln(N['i']['k']), `,`]));
print(Matrix(1,4,[``, `т. е. в нуль-пространствах
    матриц`, evaln(B['i']['k']), `.`]));
print(Matrix(1,4,[``, `Момент стабилизации`,
    'k'=evaln(l['i']), ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `определяется, когда
    количество столбцов`, ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `в очередной матрице`,
    evaln(F['i']['k']), `,`]));
print(Matrix(1,6,[``, `т. е. дефект`,
    evaln(d['i']['k']), `матрицы`,
    evaln(B['i']['k']), `,`]));
print(Matrix(1,4,[``, `становится равным
    алгебраической кратности`, evaln(m['i']), `.`]));

```

```

print(Matrix(1,4,[``, `Первое из итерированных ядер`,
  evaln(N['i'][1]), ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `является собственным
  подпространством для матрицы A`, `,` `]));
print(Matrix(1,4,[``, `а последнее (стабильное) ядро`,
  evaln(N['i'][evaln(1['i'])]), ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `- корневым подпространством`,
  `,` `]));
print(Matrix(1,4,[``, `отвечающим текущему собственному
  значению`, evaln(lambda['i']), `.` `]));
print(str);
for i from 1 to s do
  print(Matrix(1,4,[``, `Номер собственного
    значения:`, 'i'=i, `.` `]));print(``);
  B[i][0]:=E:d[i][0]:=0:
  l[i]:=1:
  print(Matrix(1,4,[``, `Вычисляются степени (итерации)`,
    evaln(B[i]['k'])=(parse('B')[i])^('k'), ``]));
  print(Matrix(1,4,[``, `матрицы`,
    parse('B')[i]='A'-evaln(lambda[i])*evaln(E),
    `,` `]));
  print(Matrix(1,3,[``, `где номер итерации k
    изменяется`, ``]));
  print(Matrix(1,4,[``, `от 1 и (не далее чем) до`,
    evaln(m[i])=m[i], `.` `]));
  print(Matrix(1,3,[``, `Затем эти матрицы приводятся
    к виду`, ``]));
  print(Matrix(1,5,[``, `Жордана-Гаусса`,
    evaln(BGJ[i]['k']), `,` ` после чего`, ``]));
  print(Matrix(1,4,[``, `вычисляются фундаментальные
    матрицы`, evaln(F[i]['k']), `,` `]));
  print(Matrix(1,3,[``, `содержащие базисы, называемые
    необработанными,`, `,` `]));
  print(Matrix(1,4,[``, `в итерированных ядрах`,
    evaln(N[i]['k']), `,` `]));
  print(Matrix(1,4,[``, `т. е. в нуль-пространствах
    матриц`, evaln(B[i]['k']), `.` `]));
  print(Matrix(1,5,[``, `Момент стабилизации`,
    'k'=evaln(1[i]), `определяется,`, `,` `]));
  print(Matrix(1,4,[``, `когда количество столбцов в
    очередной матрице`, evaln(F[i]['k']), `,` `]));

```

```

print(Matrix(1,6,['`', `т. е. дефект`,
    evaln(d[i]['k']), `матрицы`,
    evaln(B[i]['k']), ``));
print(Matrix(1,4,['`', `становится равным
    алгебраической кратности`,
    evaln(m[i])=m[i], `.`]));
print(Matrix(1,4,['`', `Первое из итерированных ядер`,
    evaln(N[i][1]), ``));
print(Matrix(1,3,['`', `является собственным
    подпространством для матрицы A,`, ``));
print(Matrix(1,4,['`', `а последнее (стабильное) ядро`,
    evaln(N[i][evaln(l[i])]), ``));
print(Matrix(1,3,['`', `- корневым подпространством,`,
    ``]));
print(Matrix(1,4,['`', `отвечающим текущему
    собственному значению`,
    evaln(lambda[i])=eval(lambda[i]), `.`]));
print(``);
for k from 1 to m[i] do
    print(Matrix(1,4,['`', `Номер итерации:`,
        'k'=k, `.`]));
    print(``);
    B[i][k]:=B[i][k-1].(A-lambda[i]*E):
    BGJ[i][k]:=LinAlgJ[JordanGauss](B[i][k])[1]:
    F[i][k],d[i][k]:=
        LinAlgJ[NullSpaceBasis](BGJ[i][k]):
    print(evaln(B[i][k])=B[i][k],
        evaln(BGJ[i][k])=BGJ[i][k],
        evaln(F[i][k])=F[i][k],
        evaln(d[i][k])=d[i][k]);
    if d[i][k]<m[i] then
        l[i]:=l[i]+1:
    else
        break;
    fi;
od:
print(Matrix(1,4,['`', `Показатель стабилизации для
    матрицы`, parse('B')[i], `:`]));
print(evaln(l[i])=l[i]);
print(str);
od:

```

```

print(str);
p:=array(1..s):
print(Matrix(1,3,[``, `Для каждого i вычисляются`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `приращения итерированных
    дефектов`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `(длины строк в столбчатых
    диаграммах; см. ниже):`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, evaln(p['i'][1])=evaln(d['i'][1]),
    ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `- длина первой (нижней) строки;`,
    ``]));
print(Matrix(1,3,[``, evaln(p['i']['k'])=
    evaln(d['i']['k'])-evaln(d['i']['k'-1]), ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `- (при k>1) - длина k-й строки.`,
    ``]));
print(``);
for i from 1 to s do
    for k from 1 to l[i] do
        p[i][k]:=d[i][k]-d[i][k-1]:
        print(evaln(p[i][k])=p[i][k]);
    od:
    print(str);
od:
print(str);
q:=array(1..s):
print(Matrix(1,3,[``, `Для каждого i вычисляются`,
    ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `вторые абсолютные приращения
    итерированных дефектов`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `(длины ступенек в столбчатой
    диаграмме; см. ниже):`, ``]));
print(Matrix(1,5,[``,
    evaln(q['i']['k'])=evaln(p['i']['k']), `,
    при`, 'k'=evaln(l['i']), `,`));
print(Matrix(1,3,[``, `- длина ступеньки на верхнем
    этаже`, `;`));
print(Matrix(1,5,[``, evaln(q['i']['k'])=
    evaln(p['i']['k'])-evaln(p['i']['k'+1]), `,
    при`, 'k'<evaln(l['i']), `,`));
print(Matrix(1,3,[``, `- длина ступеньки на k-м
    этаже (может быть нулевой).`, ``]));

```

```

print(``);
for i from 1 to s do
  q[i][l[i]]:=p[i][l[i]]:
  for k from 1 to l[i]-1 do
    q[i][k]:=p[i][k]-p[i][k+1]:
  od:
od:
for i from 1 to s do
  for k from 1 to l[i] do
    print(evaln(q[i][k])=q[i][k]);
  od;
  print(str);
od;
print(str);
DIAGR:=array(1..s):RIS:=array(1..s);
for i from 1 to s do
  DIAGR[i]:=Matrix(l[i],d[i][1],fill=``):
  for k from 1 to l[i] do
    for j from 1 to p[i][k] do
      DIAGR[i][k,j]:=``*``;
    od:
  od:
  RIS[i]:=Matrix(l[i],d[i][1]):
  for j from 1 to d[i][1] do
    for k from 1 to l[i] do
      RIS[i][k,j]:=DIAGR[i][l[i]-k+1,j];
    od;
  od;
od:
print(Matrix(1,3,[``, `Для каждого собственного
  значения`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `выводится отвечающая ему
  столбчатая диаграмма,`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `с не нумерованными пока
  векторами`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `(изображаемыми звездочками).`,
  ``]));
print(``);
print(Matrix(1,3,[``, `Эти векторы должны составлять
  базис`, ``]));

```

```
print(Matrix(1,3,[``, `в соответствующем корневом
    пространстве.`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `Построение жорданова базиса будет
    производиться далее,`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `путем "обработки" ранее
    построенных "необработанных"`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `базисов в итерированных ядрах.`,
    ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `Пока же вычисляются числовые
    параметры столбчатых диаграмм;`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `заполнение диаграмм будет
    производиться ниже.`, ``]));
print(``);
print(Matrix(1,3,[``, `Принцип построения диаграммы:`,
    ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `строки нумеруются снизу вверх;`,
    ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `их количество (высота диаграммы)`,
    ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `равняется показателю
    стабилизации;`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `длины строк равны приращениям
    итерированных дефектов,`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `они не возрастают при движении
    вверх;`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `длины ступенек равны`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `вторым абсолютным приращениям
    итерированных дефектов;`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `количество столбцов равно`,
    ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `первому из итерированных
    дефектов,`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `или, что то же, -`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `геометрической кратности
    собственного значения;`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `общее количество векторов равно`,
    ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `алгебраической кратности
    собственного значения.`, ``]));
print(``);
```

```

for i from 1 to s do
  print(evaln(DIAGR[i])=RIS[i]);
od;
print(str);
num:=0:
for i from 1 to s do
  for j from 1 to d[i][1] do
    for k from 1 to l[i] do
      if DIAGR[i][k,j]='*' then
        num:=num+1:
        DIAGR[i][k,j]:=num:
      else
        break:
      fi:
    od:
  od:
  for j from 1 to d[i][1] do
    for k from 1 to l[i] do
      RIS[i][k,j]:=DIAGR[i][l[i]-k+1,j];
    od:
  od:
od:
print(Matrix(1,3,['`', `Для векторов в столбчатых
  диаграммах принимается`, ``]));
print(Matrix(1,3,['`', `сквозная нумерация по
  следующему принципу:`, ``]));
print(Matrix(1,3,['`', `1) порядок диаграмм
  определяется`, ``]));
print(Matrix(1,3,['`', `ранее зафиксированным порядком
  собственных значений;`, ``]));
print(Matrix(1,3,['`', `2) в каждой из диаграмм`, ``]));
print(Matrix(1,3,['`', `столбцы нумеруются слева
  направо`, ``]));
print(Matrix(1,3,['`', `(в порядке невозрастания
  высот),`, ``]));
print(Matrix(1,3,['`', `а векторы в столбцах - снизу
  вверх.`, ``]));
print(``);
for i from 1 to s do
  print(evaln(DIAGR[i])=RIS[i]);
od;

```

```

print(str);print(str);
jlist:=[];
for i from 1 to s do
  for k from l[i] to 1 by -1 do
    if q[i][k]<>0 then
      for j from 1 to q[i][k] do
        jlist:=[jlist[],[lambda[i],k]];
      od:
    fi:
  od:
od:
JS:=JordanBlockMatrix(jlist);
print(Matrix(1,3,[``, `Вычисляется жорданова нормальная
  форма J=JS матрицы A`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `(в случае, если полный жорданов
  базис существует),`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `или же северо-западный жорданов
  блок JS размера ms`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `(если имеется лишь частичный
  жорданов базис).`, ``]));
print(``);
print(evaln(JS)=JS);
print(str);print(str);
H:=array(1..s);
G:=array(1..s);
M:=array(1..s);
MG:=array(1..s);
MB:=array(1..s);
mb:=array(1..s);
print(Matrix(1,3,[``, `Начинается обработка базисов
  в итерированных ядрах`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `в цикле по номеру i
  собственного значения);`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `при этом номер итерации k
  изменяется от 1 до`, ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `показателя стабилизации
  (высоты столбчатой диаграммы)`,
  evaln(l['i']), `;`]));
print(Matrix(1,4,[``, `особо выделяются случаи`,
  evaln(l['i'])=1, ``]));

```

```

print(Matrix(1,3,[``, ` "одноэтажных" столбчатых
    диаграмм.` , ``]));
print(``);
print(Matrix(1,3,[``, `Обозначения:` , ``]));
print(``);
print(Matrix(1,4,[``, evaln(C['i']['k']), ` -
    специальным образом конструируемое` , ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `прямое дополнение` , ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `к предыдущему ядру`,
    evaln(N['i']['k'-1]), ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `в текущем, более широком,
    ядре` , evaln(N['i']['k']), `:`]));
print(Matrix(1,3,[``, evaln(N['i']['k'])=
    evaln(N['i']['k'-1])+evaln(C['i']['k']), ` ,`]));
print(Matrix(1,3,[``, `причем расчет начинается с
    верхнего этажа,` , ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `а нулевое по номеру ядро
    является тривиальным;` , ``]));
print(``);
i:='i';k:='k';
print(Matrix(1,4,[``, evaln(G['i']['k']), ` - матрица,
    содержащая некоторый` , ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `(искомый) базис в`,
    evaln(C['i']['k']), ` ,`]));
print(Matrix(1,6,[``, `причем при`, 'k'<evaln(l['i']),
    `образ` , parse('V[i]')*evaln(C['i']['k'+1]),
    ``]));
print(Matrix(1,5,[``, `подпространства`,
    evaln(C['i']['k'+1]), `с последующим номером,`,
    ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `при отображении, заданном
    матрицей` , parse('V[i]'), ` ,`]));
print(Matrix(1,3,[``, `должен содержаться
    (не обязательно строго)` , ``]));
print(Matrix(1,5,[``, `в дополнении` , evaln(C['i']['k']),
    `с текущим номером,` , ``]));
print(Matrix(1,5,[``, `так что матрица`,
    evaln(G['i']['k']), `должна являться` , ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `конкатенацией подматрицы`,
    parse('V[i]')*evaln(G['i']['k'+1]), ``]));

```

```

print(Matrix(1,4,[``, `и (возможно, пустой) подматрицы`,
  evaln(H['i']['k']), `,`]));
print(Matrix(1,4,[``, `содержащей базис в некотором
  прямом дополнении`, evaln(D['i']['k']), ``]));
print(Matrix(1,6,[``, `к образу`,
  parse('B[i]')*evaln(C['i']['k'+1]), ` в `,
  evaln(C['i']['k']), `:`]));
print(Matrix(1,3,[``, evaln(C['i']['k'])=
  parse('B[i]')*evaln(C['i']['k'+1])+
  evaln(D['i']['k']), `.`]));
print(``);
print(str);
for i from 1 to s do
  print(Matrix(1,4,[``, `Номер собственного значения:`,
    'i'=i, `.`]));
  if l[i]=1 then
    print(Matrix(1,4,[``, `Имеет место случай
      одноэтажной диаграммы:`,
      evaln(l[i])=1, `;`]));
    print(Matrix(1,3,[``, `соответствующее корневое
      подпространство совпадает с собственным;`,
      ``]));
    print(Matrix(1,4,[``, `обработка базиса,
      содержащегося в фундаментальной матрице`,
      evaln(F[i][1]), `,`]));
    print(Matrix(1,3,[``, `не требуется;`, ``]));
    print(Matrix(1,9,[``, `матрицы`,
      evaln(H[i][1]), `,`, evaln(G[i][1]), `и`,
      evaln(F[i][1]), `совпадают.` , ``]));
    print(``);
    H[i][1]:=F[i][1];
    G[i][1]:=H[i][1];
    print(evaln(H[i][1])=H[i][l[i]],
      evaln(G[i][1])=G[i][l[i]]);
    print(str);
  else
    print(Matrix(1,4,[``, `Высота столбчатой
      диаграммы:`, evaln(l[i])=l[i], `.`]));
    print(``);
    for k from l[i] to 1 by -1 do

```

```

print(Matrix(1,4,[``, `Номер этажа:`, 'k'=k,
  `.`]));
print(``);
if k=1[i] then
  print(Matrix(1,3,[``, `Определяем векторы
    верхнего этажа.` , ``]));
  print(Matrix(1,4,[``, `Формируется матрица-
    конкатенация`, evaln(M[i])[k], `,`]));
  print(Matrix(1,3,[``, `двумя зонами которой
    являются`, ``]));
  print(Matrix(1,7,[``, `матрицы`,
    evaln(F[i][k-1]), `и`,
    evaln(F[i][k]), `, содержащие`, ``]));
  print(Matrix(1,3,[``, `базисы в предстабильном
    и в стабильном ядрах;`, ``]));
  print(Matrix(1,3,[``, `затем эта матрица
    приводится к ступенчатому виду`, ``]));
  print(Matrix(1,4,[``, evaln(MG[i][k]), `, по
    которому определяется`, ``]));
  print(Matrix(1,5,[``, `матрица`,
    evaln(H[i][k]), `, содержащая
    добавочные`, ``]));
  print(Matrix(1,4,[``, `базисные векторы из
    правой зоны матрицы`,
    evaln(M[i][k]), `,`]));
  print(Matrix(1,4,[``, `дополняющие базис
    в предстабильном ядре`,
    evaln(N[i][k-1]), ``]));
  print(Matrix(1,4,[``, `до базиса в стабильном
    ядре`, evaln(N[i][k]), `;`]));
  print(Matrix(1,5,[``, `матрица`, evaln(H[i][k]),
    `отвечает ступеньке`, ``]));
  print(Matrix(1,6,[``, `верхнего уровня`, 'k'=k,
    `, т. е. содержит базис в`,
    evaln(D[i][k]), `;`]));
  print(Matrix(1,4,[``, `формируется также
    матрица`, evaln(G[i][k]), `,`]));
  print(Matrix(1,3,[``, `отвечающая всему
    рассматриваемому уровню`,``,`]));
  print(Matrix(1,4,[``, `т. е. содержащая базис
    в`, evaln(C[i][k]), `;`]));

```

```

print(Matrix(1,4,[``, `для верхнего уровня эти
    матрицы совпадают:`,
    evaln(G[i][k])=evaln(H[i][k]), `.`]));
M[i][k]:= <F[i][k-1]|F[i][k]>;
MG[i][k]:=LinAlgJ[Gauss](M[i][k])[1];
MB[i][k],mb[i][k]:=
    LinAlgJ[ColSpaceBasis](M[i][k]);
H[i][k]:=SubMatrix(MB[i][k],
    1..n,d[i][k-1]+1..mb[i][k]);
G[i][k]:=H[i][k];
print(evaln(M[i][k])=M[i][k],
    evaln(MG[i][k])=MG[i][k]);
print(evaln(H[i][k])=H[i][k],
    evaln(G[i][k])=G[i][k]);
print(str);
elif k<l[i] and k>1 then
print(Matrix(1,5,[``, `Определяем векторы`,
    k, `-го этажа.`, ``]));
if q[i][k]=0 then
print(Matrix(1,3,[``, `Имеет место случай,
    когда на данном уровне`, ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `отсутствует ступенька,
    поскольку`, evaln(q[i][k])=0, `.`]));
print(Matrix(1,4,[``, `Вследствие этого,
    матрица`, evaln(H[i][k]), `.`]));
print(Matrix(1,3,[``, `отвечающая ступеньке,
    - пуста,`, ``]));
print(Matrix(1,5,[``, `а матрица`,
    evaln(G[i][k]), `, отвечающая всему
    уровню,`, ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `находится умножением
    слева на матрицу`, parse(''V'')[i],``]));
print(Matrix(1,5,[``, `матрицы`,
    evaln(G[i][k+1]), `, отвечающей`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `(расположенному выше)
    уровню.`, ``]));
G[i][k]:=B[i][1].G[i][k+1];
print(evaln(H[i][k])=[],
    evaln(G[i][k])=G[i][k]);
print(str);

```

else

```
print(Matrix(1,5,['`', `Имеет место случай,
    когда на`, k, `- м уровне есть
    ступенька`, ``]));
print(Matrix(1,4,['`', `длины`,
    evaln(q[i][k])=q[i][k], `.`]));
print(``);
print(Matrix(1,4,['`', `Производим
    формирование тройной конкатенации`,
    evaln(M[i][k]), `:`]));
print(Matrix(1,3,['`', `в левой зоне -
    матрица, содержащая`, ``]));
print(Matrix(1,4,['`', `необработанный базис
    в ядре`, evaln(N[i][k-1]), `;`]));
print(Matrix(1,4,['`', `в центральной зоне -
    матрица, содержащая образ`,
    parse(''B'')[i] *evaln(G[i][k+1]), ``]));
print(Matrix(1,4,['`', `базиса в
    подпространстве`, evaln(C[i][k+1]),
    ``]));
print(Matrix(1,4,['`', `при отображении,
    заданном матрицей`, parse(''B'')[i],
    `;`]));
print(Matrix(1,3,['`', `в правой зоне -
    матрица, содержащая`, ``]));
print(Matrix(1,4,['`', `необработанный базис
    в ядре`, evaln(N[i][k]), `.`]));
print(``);
print(Matrix(1,5,['`', `Далее матрица`,
    evaln(M[i][k]), `приводится`, ``]));
print(Matrix(1,5,['`', `к ступенчатому виду`,
    evaln(MG[i][k]), `, после чего`, ``]));
print(Matrix(1,6,['`', `формируется матрица`,
    evaln(H[i][k]), `,`]));
print(Matrix(1,3,['`', `содержащая добавочные
    базисные векторы,`, ``]));
print(Matrix(1,6,['`', `из третьей (правой)
    зоны матрицы`, evaln(M[i][k]), `,`]));
print(Matrix(1,6,['`', `дополняющие до
    базиса в`, k, `- м ядре`,
    evaln(N[i][k]), ``]));
```

```

print(Matrix(1,6,[``, `базис в прямой сумме`,
    k-1, `- го ядра`,
    evaln(N[i][k-1]), ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `и образа`,
    parse('B')[i]*evaln(C[i][k+1]), `.`]));
print(Matrix(1,7,[``, `Матрица`,
    evaln(H[i][k]), `отвечает ступенке`,
    k, `- го уровня`, ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `т. е. содержит
    базис в`, evaln(D[i][k]), `;`]));
print(Matrix(1,3,[``, `она является подматрицей
    третьей зоны`, ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `в исходной
    конкатенации`, evaln(M[i][k]), `.`]));
print(Matrix(1,4,[``, `Кроме того, формируется
    матрица`, evaln(G[i][k]), ``,`]));
print(Matrix(1,3,[``, `отвечающая всему
    рассматриваемому уровню`, ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `и содержащая базис в`,
    evaln(C[i][k]), `.`]));
print(Matrix(1,5,[``, `Матрица`,
    evaln(G[i][k]), `является
    конкатенацией`, ``]));
print(Matrix(1,6,[``, `подматриц`,
    evaln(B[i])*evaln(G[i][k+1]), `и`,
    evaln(H[i][k]), `.`]));
M[i][k]:=<F[i][k-1]|B[i][1].G[i][k+1]|F[i][k]>;
MG[i][k]:=LinAlgJ[Gauss](M[i][k])[1];
MB[i][k],mb[i][k]:=
    LinAlgJ[ColSpaceBasis](M[i][k]);
H[i][k]:=SubMatrix(MB[i][k],
    1..n,d[i][k-1]+p[i][k+1]+1..mb[i][k]);
G[i][k]:=SubMatrix(MB[i][k],
    1..n,d[i][k-1]+1..mb[i][k]);
print(evaln(M[i][k])=M[i][k],
    evaln(MG[i][k])=MG[i][k]);
print(evaln(H[i][k])=H[i][k],
    evaln(G[i][k])=G[i][k]);
print(str);
fi;
else

```

```

print(Matrix(1,3,['`', `Определяем векторы первого
    (нижнего) этажа.` , ``]));
if q[i][k]=0 then
    print(Matrix(1,3,['`', `Имеет место случай,
        когда на нижнем уровне` , ``]));
    print(Matrix(1,4,['`', `отсутствует ступенька,
        поскольку` , evaln(q[i][k])=0, `.`]));
    print(Matrix(1,4,['`', `Вследствие этого,
        матрица` , evaln(H[i][k]), ` , `]));
    print(Matrix(1,3,['`', `отвечающая ступеньке,
        - пуста,` , ``]));
    print(Matrix(1,5,['`', `а матрица` ,
        evaln(G[i][k]), ` , отвечающая всему` ,
        ``]));
    print(Matrix(1,4,['`', `первому уровню,
        находится умножением слева
        на матрицу` , parse(''В'')[i], ``]));
    print(Matrix(1,5,['`', `матрицы` ,
        evaln(G[i][k+1]), ` , отвечающей` , ``]));
    print(Matrix(1,3,['`', `предыдущему
        (второму) уровню.` , ``]));
    G[i][k]:=B[i][1].G[i][k+1];
    print(evaln(H[i][k])=
        [],evaln(G[i][k])=G[i][k]);
    print(str);
else
    print(Matrix(1,3,['`', `Имеет место случай,
        когда на нижнем уровне` , ``]));
    print(Matrix(1,4,['`', `есть ступенька длины` ,
        evaln(q[i][k])=q[i][k], `.`]));
    print(``);
    print(Matrix(1,4,['`', `Производим формирование
        двойной конкатенации` ,
        evaln(M[i][k]), `:`]));
    print(Matrix(1,4,['`', `в левой зоне - матрица,
        содержащая образ` ,
        parse(''В'')[i]*evaln(G[i][k+1]), ``]));
    print(Matrix(1,4,['`', `базиса в
        подпространстве` , evaln(C[i][k+1]),
        ``]));

```

```

print(Matrix(1,4,[``, `при отображении,
    заданном матрицей`, parse(''B'')[i],
    `;`]));
print(Matrix(1,3,[``, `в правой зоне -
    матрица, содержащая`, ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `необработанный базис
    в первом ядре`, evaln(N[i][k]), `.`]));
print(``);
print(Matrix(1,5,[``, `Далее матрица`,
    evaln(M[i][k]), `приводится`, ``]));
print(Matrix(1,5,[``, `к ступенчатому виду`,
    evaln(MG[i][k]), `, после чего`, ``]));
print(Matrix(1,5,[``, `формируется матрица`,
    evaln(H[i][k]), `содержащая`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `добавочные базисные
    векторы`, `, ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `из правой зоны матрицы`,
    evaln(M[i][k]), `,`]));
print(Matrix(1,4,[``, `дополняющие до базиса
    в первом ядре`, evaln(N[i][k]), ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `базис в образе`,
    parse(''B'')[i]*evaln(C[i][k+1]), `.`]));
print(Matrix(1,5,[``, `Матрица`,
    evaln(H[i][k]), `отвечает ступеньке
    нижнего уровня`, `, ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `т. е. содержит
    базис в`, evaln(D[i][k]), `;`]));
print(Matrix(1,3,[``, `она является
    подматрицей второй зоны`, ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `в исходной
    конкатенации`, evaln(M[i][k]), `.`]));
print(Matrix(1,5,[``, `Кроме того,
    формируется матрица`, evaln(G[i][k]),
    `, отвечающая`, ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `всему первому уровню
    и содержащая базис в`,
    evaln(C[i][k]), `.`]));
print(Matrix(1,5,[``, `Матрица`,
    evaln(G[i][k]), `является конкатенацией`,
    ``]));

```

```

print(Matrix(1,6,[``, `подматриц`,
    parse(''B'')[i]*evaln(G[i][k+1]),
    `и`, evaln(H[i][k]), `.`));
M[i][k]:=<B[i][1].G[i][k+1|F[i][k]>;
MG[i][k]:=LinAlgJ[Gauss](M[i][k])[1];
MB[i][k],mb[i][k]:=
    LinAlgJ[ColSpaceBasis](M[i][k]);
H[i][k]:=SubMatrix(MB[i][k],
    1..n,p[i][k+1]+1..mb[i][k]);
G[i][k]:=MB[i][k];
print(evaln(M[i][k])=M[i][k],
    evaln(MG[i][k])=MG[i][k]);
print(evaln(H[i][k])=H[i][k],
    evaln(G[i][k])=G[i][k]);
print(str);
    fi;
  fi;
od;
fi;
print(str);
od;
print(str);
print(Matrix(1,3,[``, `Начинается подготовка
    окончательных ответов.` , ``]));
print(``);
print(Matrix(1,3,[``, `Формируется матрица GS,
    содержащая` , ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `(полный или частичный)
    жорданов базис.` , ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `Число столбцов в GS
    равняется сумме` , evaln(ms)=ms, ``]));

print(Matrix(1,3,[``, `всех алгебраических кратностей;`,
    ``]));
print(Matrix(1,4,[``, `в нее заносятся все векторы
    из всех матриц` , evaln(G['i']['k']), `,`]));
print(Matrix(1,3,[``, `в порядке, предписанном
    столбчатыми диаграммами:` , ``]));
print(Matrix(1,5,[``, `векторы-столбцы из` ,
    evaln(G['i']['k']), `получают в матрице GS` , ``]));

```

```

print(Matrix(1,3,[``, `в точности те номера,
    которые`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `стоят в i-ой столбчатой диаграмме
    на k-ом уровне`, ``.``]));

print(Matrix(1,3,[``, `Матрица GS представляет
    жорданов базис`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `в прямой сумме всех корневых
    подпространств.`, ``]));
GS:=Matrix(n,ms);
for i from 1 to s do
    for k from 1 to l[i] do
        for u from 1 to p[i][k] do
            GS[1..n,DIAGR[i][k,u]..DIAGR[i][k,u]]:=
                SubMatrix(G[i][k],1..n,u..u);
        od;
    od;
od;
print(evaln(GS)=GS);
print(str);print(str);
if exist_jbas then
    print(Matrix(1,3,[``, `Поскольку в данном примере
        выполнено условие ms=n,`, ``]));
    print(Matrix(1,3,[``, `то матрица GS является
        квадратной`, ``]));
    print(Matrix(1,3,[``, `и содержит полный
        жорданов базис`, ``]));
    print(Matrix(1,3,[``, `для данной матрицы A
        (во всем пространстве).`, ``]));
    print(Matrix(1,3,[``, `Ее можно принять за искомую
        матрицу T`, ``]));
    print(Matrix(1,3,[``, `(матрицу перехода от исходного
        базиса к жорданову базису).`, ``]));
    print(Matrix(1,3,[``, `Вторая искомая матрица
        (жорданова нормальная форма J`, ``]));
    print(Matrix(1,3,[``, `для матрицы A) уже найдена
        выше: J=JS.`, ``]));
T:=Matrix(GS);dt:=Determinant(T);
J:=Matrix(JS);
print(str);print(str);

```

```

print(Matrix(1,3,['`', `Окончательные результаты:`,
` `]));
print(` `);
print(Matrix(1,3,['`', `Жорданова нормальная форма
для матрицы A:`, ` `]));
print(evaln(J)=J);
print(Matrix(1,3,['`', `Жорданов базис содержится
в матрице:`, ` `]));
print(evaln(T)=T);
print(Matrix(1,4,['`', `Ее определитель det(T) =`,
dt, `.`]));
print(str);print(str);
else
print(Matrix(1,3,['`', `Поскольку в данном примере
имеет место неравенство  $ms < n$ ,`, ` `]));
print(Matrix(1,3,['`', `то матрица GS не является
квадратной`, ` `]));
print(Matrix(1,3,['`', `и содержит лишь частичный
жорданов базис для данной матрицы A`, ` `]));
print(Matrix(1,3,['`', `(не во всем пространстве,
но лишь в корневой сумме).`, ` `]));
print(Matrix(1,4,['`', `Рассмотрим инвариантное
относительного заданного оператора`,
phi, ` `]));
print(Matrix(1,3,['`', `прямое дополнение Y
к корневой сумме,`, ` `]));
print(Matrix(1,3,['`', `которое представляется
как нуль-пространство матрицы gA,`, ` `]));
print(Matrix(1,3,['`', `которая является
значением g(A) на матрице A`, ` `]));
print(Matrix(1,3,['`', `многочлена g
(не имеющего корней в Q множителя`, ` `]));
print(Matrix(1,3,['`', `характеристического
многочлена h).`, ` `]));
print(` `);
print(Matrix(1,3,['`', `Значение многочлена g
на матрице A:`, ` `]));print(` `);
gA:=MatrixFunction(A,g,t);
print(evaln(gA)=gA);
print(` `);

```

```

print(Matrix(1,3,[``, `Матрица BY, содержащая базис`,
  ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `в нуль-пространстве Y
  матрицы gA:`, ``]));
print(``);
BY:=LinAlgJnew[NullSpaceBasis](gA)[1];
print('BY'=BY);
print(``);
print(Matrix(1,3,[``, `Матрица T=(GS|BY), содержащая`,
  ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `частично жорданов базис
  для матрицы A:`, ``]));
print(``);
T:=<GS|BY>;
dt:=Determinant(T);
print('T'=T);
print(``);
print(Matrix(1,3,[``, `Частично жорданова форма J
  для матрицы A`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `вычисляется с использованием
  T как матрицы перехода`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `от исходного (естественного)
  базиса`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `к найденному
  частично жорданову:`, ``]));
print(``);
J:=MatrixInverse(T).A.T;
print('J'=J);
print(``);
print(Matrix(1,3,[``, `Матрица J имеет
  блочно-диагональный вид`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `с двумя диагональными
  блоками: A=diag(JS,K);`, ``]));
print(Matrix(1,5,[``, `блок JS порядка`, ms,
  `отвечает в найденном базисе сужению`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `данного линейного оператора
  на его корневую сумму;`, ``]));
print(Matrix(1,5,[``, `блок K порядка`, n-ms,
  `отвечает сужению оператора`, ``]));
print(Matrix(1,3,[``, `на инвариантное прямое
  дополнение Y к корневой сумме.`, ``]));

```

```

print(``);
K:=SubMatrix(J,ms+1..n,ms+1..n);
print('K'=K);
print(str);
print(str);
print(``);
print(Matrix(1,3, [``, `Окончательные результаты:`,
    ``]));
print(``);
print(Matrix(1,3, [``, `Частично жорданова нормальная
    форма для матрицы A:`, ``]));
print(evaln(J)=J);
print(``);
print(Matrix(1,3, [``, `Частично жорданов базис
    содержится в матрице:`, ``]));
print(``);
print(evaln(T)=T);
print(Matrix(1,4, [``, `Ее определитель det(T) =`,
    dt, `.`]));
print(str);print(str);
fi;
# "Сценарная часть" работы процедуры завершена.
# Далее следует завершение работы всей процедуры,
# с возвращением (в виде,
# допускающем дальнейшее использование)
# 1) матрицы J - (частичной) ж.н.ф. для A;
# 2) матрицы T - перехода от исходного базиса
# к (частично) жорданову.
RETURN(J,T);
end proc;

```

Сохранение пакета LinAlgJ

```
> save LinAlgJ,"E:/MaplePackages/LinAlgJ.m";
```

Глава 3

ПРИМЕРЫ РАБОТЫ ПРОЦЕДУРЫ - СЦЕНАРИЯ JRD

В данной главе мы демонстрируем два примера функционирования процедуры **JRD**.

В первом примере (§ 3.1) для рассматриваемой матрицы существует *полный* жорданов базис.

Здесь мы воспроизводим всю выдаваемую на печать информацию.

Поясним, что некоторая (небольшая) часть этой информации носит общий "познавательный" характер, не зависящий от конкретной исследуемой матрицы.

Соответствующие фрагменты помечены в тексте и не повторяются при рассмотрении второго примера (§ 3.2), хотя при реальной работе процедуры повторение будет иметь место.

Во втором примере имеется лишь *частичный* жорданов базис.

В § 3.3 приводятся условия и ответы двенадцати вариантов проверочной работы, выполнять которую рекомендуется "полуручным" методом, поручая **Maple** лишь *рутинные* этапы работы: приведение матриц к ступенчатому виду (виду Жордана – Гаусса), а также решение (однородных) систем линейных уравнений. Предполагается, что процедура **JRD** здесь будет применяться для самопроверки.

§ 3.1. Случай наличия полного жорданова базиса

Загрузка модуля **LinearAlgebra**, настройка интерфейса на отображение матриц произвольного размера, чтение и запуск пакета **LinAlgJ**.

```
> restart;with(LinearAlgebra):  
interface(rtablesize=infinity):  
read "E:/MaplePackages/LinAlgJ.m";  
with(LinAlgJ);
```

[*ColSpaceBasis, Gauss, JRD, JordanGauss, LinSolve, NullSpaceBasis*]

Ввод матрицы **A** и запуск процедуры **JRD**.

```
> A:=Matrix([[5, -4, -3, 5, -1, 1, 5, 1, -1, 3, 1],
[12, 30, 14, 4, 5, -8, 0, -4, 12, -8, -4],
[12, 8, 3, 5, -1, -1, 1, -4, 5, -2, -3],
[1, -14, -7, -1, -4, 7, -3, -3, -4, 2, -1],
[-12, -8, -1, -5, 3, 1, -1, 4, -5, 2, 3],
[13, 28, 12, 5, 4, -8, 1, -4, 11, -7, -4],
[-6, 18, 10, -5, 5, -8, -3, 1, 5, -5, 0],
[6, -4, -3, 5, -1, 1, 5, 0, -1, 3, 1],
[-12, -34, -16, -4, -6, 9, 0, 4, -14, 9, 4],
[23, 39, 21, 8, 7, -9, 0, -8, 17, -11, -7],
[13, -22, -16, 10, -9, 9, 7, -1, -6, 8, 0]]);

> JRD(A);
```

Сначала выдается на печать подробный (пошаговый) протокол работы алгоритма; затем возвращаются две матрицы: (частично) жорданова нормальная форма **J** для матрицы **A** и матрица **T**, содержащая (частично) жорданов базис для **A**; имеет место соотношение подобия: $J=T^{-1}AT$.

[*Загружена матрица A с рациональными элементами.*]

[*Размер матрицы: n=11.*]

[*Матрице A отвечает линейный оператор φ,*]

[*действующий в линейном пространстве размерности 11 над полем Q.*]

[*Характеристический многочлен:*]

$$h(\lambda) = \lambda^{11} - 4\lambda^{10} - 5\lambda^9 + 30\lambda^8 + 15\lambda^7 - 96\lambda^6 - 51\lambda^5 + 150\lambda^4 + 120\lambda^3 - 80\lambda^2 - 112\lambda - 32$$

[*Разложение характеристического многочлена*]

[*на неприводимые множители:*]

$$h(\lambda) = (\lambda - 2)^5 (\lambda + 1)^6$$

[Мощность спектра: $s=2$.]

[Собственные значения и их алгебраические кратности:]

$$\lambda_1 = 2, m_1 = 5$$

$$\lambda_2 = -1, m_2 = 6$$

[Сумма алгебраических кратностей собственных значений: $ms=11$.]

[Полный жорданов базис существует.]

<*Начало фрагмента T1*>

[Далее, в цикле по номеру i собственного значения,]

[вычисляются степени (итерации) $B_{i_k} = B_i^k$ матрицы $B_i = A - \lambda_i E$,]

[где k изменяется от 1 и (не далее чем) до m_i .]

[Затем эти матрицы приводятся к виду Жордана – Гаусса BGJ_{i_k} ,]

[после чего вычисляются фундаментальные матрицы]

[F_{i_k} , содержащие базисы, называемые необработанными,]

[в итерированных ядрах N_{i_k} , т. е. в нуль-пространствах матриц B_{i_k} .]

[Момент стабилизации $k = l_i$ определяется, когда количество столбцов]

[в очередной матрице F_{i_k} , т. е. дефект d_{i_k} матрицы B_{i_k} ,]

[становится равным алгебраической кратности m_i .]

[Первое из итерированных ядер N_{i_1}]

[является собственным подпространством для матрицы A ,]

[а последнее (стабильное) ядро $N_{i_{l_i}}$ - корневым подпространством,]

[отвечающим текущему собственному значению λ_i .]

<*Конец фрагмента T1*>

[Номер собственного значения: $i=1$.]

<*Начало фрагмента T2*>

[Вычисляются степени (итерации) $B_{1_k} = B_1^k$ матрицы $B_1 = A - \lambda_1 E$,]

[где k изменяется от 1 и (не далее чем) до $m_1 = 5$.]

[Затем эти матрицы приводятся к виду Жордана – Гаусса BGJ_{1_k} ,]

[после чего вычисляются фундаментальные матрицы]
 [F_{1_k} , содержащие базисы, называемые необработанными,]
 [в итерированных ядрах N_{1_k} , т. е. в нуль-пространствах матриц B_{1_k} .]
 [Момент стабилизации $k = l_1$ определяется, когда количество столбцов]
 [в очередной матрице F_{1_k} , т. е. дефект d_{1_k} матрицы B_{1_k} ,]
 [становится равным алгебраической кратности $m_1 = 5$.]
 [Первое из итерированных ядер N_{1_1}]
 [является собственным подпространством для матрицы A ,]
 [а последнее (стабильное) ядро N_{1_1} - корневым подпространством,]
 [отвечающим текущему собственному значению $\lambda_1 = 2$.]

<*Конец фрагмента T2*>

[Номер итерации: $k=1$.]

$$B_{1_1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -3 & 5 & -1 & 1 & 5 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 12 & 28 & 14 & 4 & 5 & -8 & 0 & -4 & 12 & -8 & -4 \\ 12 & 8 & 1 & 5 & -1 & -1 & 1 & -4 & 5 & -2 & -3 \\ 1 & -14 & -7 & -3 & -4 & 7 & -3 & -3 & -4 & 2 & -1 \\ -12 & -8 & -1 & -5 & 1 & 1 & -1 & 4 & -5 & 2 & 3 \\ 13 & 28 & 12 & 5 & 4 & -10 & 1 & -4 & 11 & -7 & -4 \\ -6 & 18 & 10 & -5 & 5 & -8 & -5 & 1 & 5 & -5 & 0 \\ 6 & -4 & -3 & 5 & -1 & 1 & 5 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -12 & -34 & -16 & -4 & -6 & 9 & 0 & 4 & -16 & 9 & 4 \\ 23 & 39 & 21 & 8 & 7 & -9 & 0 & -8 & 17 & -13 & -7 \\ 13 & -22 & -16 & 10 & -9 & 9 & 7 & -1 & -6 & 8 & -2 \end{bmatrix},$$

$$BGJ_{1_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F_{1_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, d_{1_1} = 2$$

[Номер итерации: $k=2$.]

$$B_{1_2} = \begin{bmatrix} 25 & 33 & 20 & -3 & 5 & -4 & -14 & -18 & 15 & -14 & -10 \\ -24 & -88 & -43 & -7 & -17 & 27 & 1 & 8 & -35 & 26 & 9 \\ -27 & -54 & -21 & -9 & -6 & 15 & 0 & 9 & -24 & 15 & 9 \\ -32 & 12 & 4 & 0 & 7 & -17 & 11 & 22 & -3 & 2 & 10 \\ 27 & 54 & 21 & 9 & 6 & -15 & 0 & -9 & 24 & -15 & -9 \\ -29 & -79 & -31 & -13 & -11 & 30 & -5 & 7 & -29 & 20 & 9 \\ 10 & -45 & -24 & 12 & -12 & 21 & 12 & 2 & -12 & 12 & 0 \\ 16 & 33 & 20 & -3 & 5 & -4 & -14 & -9 & 15 & -14 & -10 \\ 24 & 115 & 55 & 7 & 23 & -33 & -1 & -8 & 50 & -32 & -9 \\ -46 & -151 & -82 & -10 & -32 & 42 & 7 & 18 & -59 & 50 & 18 \\ 0 & 78 & 53 & -15 & 26 & -25 & -17 & -14 & 27 & -26 & -1 \end{bmatrix},$$

$$BGJ_{1_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F_{1_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, d_{1_2} = 3$$

[Номер итерации: $k=3$.]

$$B_{1_3} = \begin{bmatrix} -60 & -142 & -85 & 29 & -29 & 30 & 55 & 62 & -56 & 56 & 27 \\ 81 & 270 & 135 & 27 & 54 & -81 & 0 & -27 & 108 & -81 & -27 \\ 81 & 189 & 81 & 27 & 27 & -54 & 0 & -27 & 81 & -54 & -27 \\ 69 & 34 & 31 & -29 & 2 & 24 & -55 & -71 & 29 & -29 & -27 \\ -81 & -189 & -81 & -27 & -27 & 54 & 0 & 27 & -81 & 54 & 27 \\ 99 & 216 & 81 & 54 & 27 & -81 & 27 & -18 & 81 & -54 & -27 \\ -9 & 108 & 54 & -27 & 27 & -54 & -27 & -18 & 27 & -27 & 0 \\ -33 & -142 & -85 & 29 & -29 & 30 & 55 & 35 & -56 & 56 & 27 \\ -81 & -378 & -189 & -27 & -81 & 108 & 0 & 27 & -162 & 108 & 27 \\ 144 & 486 & 270 & 27 & 108 & -135 & -27 & -63 & 189 & -162 & -54 \\ 3 & -250 & -166 & 56 & -83 & 84 & 55 & 53 & -83 & 83 & 0 \end{bmatrix},$$

$$BGJ_{1_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F_{1_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$d_{1_3} = 4$$

[Номер итерации: k=4.]

$$B_{1_4} = \begin{bmatrix} 216 & 486 & 297 & -108 & 108 & -108 & -189 & -243 & 189 & -189 & -81 \\ -243 & -891 & -459 & -81 & -189 & 270 & 0 & 81 & -351 & 270 & 81 \\ -243 & -648 & -297 & -81 & -108 & 189 & 0 & 81 & -270 & 189 & 81 \\ -216 & -243 & -189 & 135 & -54 & -27 & 216 & 270 & -135 & 135 & 81 \\ 243 & 648 & 297 & 81 & 108 & -189 & 0 & -81 & 270 & -189 & -81 \\ -297 & -648 & -243 & -189 & -81 & 243 & -108 & 27 & -243 & 162 & 81 \\ -27 & -243 & -108 & 54 & -54 & 135 & 54 & 81 & -54 & 54 & 0 \\ 135 & 486 & 297 & -108 & 108 & -108 & -189 & -162 & 189 & -189 & -81 \\ 243 & 1296 & 675 & 81 & 297 & -378 & 0 & -81 & 540 & -378 & -81 \\ -432 & -1620 & -918 & -54 & -378 & 459 & 108 & 216 & -621 & 540 & 162 \\ 54 & 729 & 486 & -162 & 243 & -243 & -162 & -216 & 243 & -243 & 0 \end{bmatrix},$$

$$BGJ_{1_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F_{1_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$d_{1_4} = 5$$

[Показатель стабилизации для матрицы B_1 :]

$$l_1 = 4$$

[Номер собственного значения: $i=2$.]

<*Начало фрагмента ТЗ*>

[Вычисляются степени (итерации) $B_{2k} = B_2^k$ матрицы $B_2 = A - \lambda_2 E$,]

[где k изменяется от 1 и (не далее чем) до $m_2 = 6$.]

[Затем эти матрицы приводятся к виду Жордана – Гаусса BGJ_{2k} ,]

[после чего вычисляются фундаментальные матрицы]

[F_{2k} , содержащие базисы, называемые необработанными,]

[в итерированных ядрах N_{2k} , т. е. в нуль-пространствах матриц B_{2k} .]

[Момент стабилизации $k = l_2$ определяется, когда количество столбцов]

[в очередной матрице F_{2k} , т. е. дефект d_{2k} матрицы B_{2k} ,]

[становится равным алгебраической кратности $m_2 = 6$.]

[Первое из итерированных ядер N_{21}]

[является собственным подпространством для матрицы A ,]

[а последнее (стабильное) ядро N_{2l_2} - корневым подпространством,]

[отвечающим текущему собственному значению $\lambda_2 = -1$.]

<*Конец фрагмента ТЗ*>

[Номер итерации: $k=1$.]

$$B_{2_1} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & -3 & 5 & -1 & 1 & 5 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 12 & 31 & 14 & 4 & 5 & -8 & 0 & -4 & 12 & -8 & -4 \\ 12 & 8 & 4 & 5 & -1 & -1 & 1 & -4 & 5 & -2 & -3 \\ 1 & -14 & -7 & 0 & -4 & 7 & -3 & -3 & -4 & 2 & -1 \\ -12 & -8 & -1 & -5 & 4 & 1 & -1 & 4 & -5 & 2 & 3 \\ 13 & 28 & 12 & 5 & 4 & -7 & 1 & -4 & 11 & -7 & -4 \\ -6 & 18 & 10 & -5 & 5 & -8 & -2 & 1 & 5 & -5 & 0 \\ 6 & -4 & -3 & 5 & -1 & 1 & 5 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ -12 & -34 & -16 & -4 & -6 & 9 & 0 & 4 & -13 & 9 & 4 \\ 23 & 39 & 21 & 8 & 7 & -9 & 0 & -8 & 17 & -10 & -7 \\ 13 & -22 & -16 & 10 & -9 & 9 & 7 & -1 & -6 & 8 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F_{2_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{17} & \frac{2}{17} & \frac{-5}{17} & \frac{7}{17} & \frac{4}{17} \\ \frac{7}{17} & \frac{-4}{17} & \frac{-7}{17} & \frac{3}{17} & \frac{9}{17} \\ \frac{-14}{17} & \frac{-26}{17} & \frac{-3}{17} & \frac{-6}{17} & \frac{-1}{17} \\ \frac{-7}{17} & \frac{4}{17} & \frac{7}{17} & \frac{-3}{17} & \frac{-9}{17} \\ \frac{20}{17} & \frac{8}{17} & \frac{-3}{17} & \frac{11}{17} & \frac{16}{17} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, d_{2_2} = 5$$

[Номер итерации: $k=3$.]

$$B_{2_3} = \begin{bmatrix} 273 & 47 & 14 & 137 & -11 & 21 & 64 & -73 & 52 & 11 & -36 \\ 189 & 261 & 126 & 72 & 36 & -54 & 9 & -63 & 117 & -63 & -54 \\ 162 & -81 & -54 & 81 & -54 & 54 & 27 & -54 & 0 & 27 & -27 \\ -192 & -236 & -122 & -83 & -43 & 60 & -37 & 46 & -106 & 43 & 36 \\ -162 & 81 & 81 & -81 & 81 & -54 & -27 & 54 & 0 & -27 & 27 \\ 189 & 261 & 126 & 72 & 36 & -54 & 9 & -63 & 117 & -63 & -54 \\ -81 & 189 & 108 & -54 & 54 & -81 & -27 & 27 & 54 & -54 & 0 \\ 273 & 47 & 14 & 137 & -11 & 21 & 64 & -73 & 52 & 11 & -36 \\ -189 & -261 & -126 & -72 & -36 & 54 & -9 & 63 & -117 & 63 & 54 \\ 351 & 180 & 99 & 153 & 9 & 0 & 36 & -117 & 117 & -36 & -81 \\ 354 & -142 & -121 & 191 & -92 & 102 & 91 & -100 & -2 & 65 & -36 \end{bmatrix},$$

$$BGJ_{2_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{17}{12} & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{11}{12} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{11}{12} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{29}{12} & \frac{11}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{23}{12} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{12} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_{2_3} = \begin{bmatrix} -\frac{17}{12} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{11}{12} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{11}{12} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & -\frac{1}{3} \\ \frac{29}{12} & -\frac{11}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{23}{12} & -\frac{7}{3} \\ -\frac{11}{12} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, d_{2_3} = 6$$

[Показатель стабилизации для матрицы B_2 :]

$$l_2 = 3$$

[Для каждого i вычисляются приращения итерированных дефектов]

[(длины строк столбчатой диаграммы; см. ниже):]

[$p_{i_1} = d_{i_1}$ - длина первой (нижней) строки;]

[$p_{i_k} = d_{i_k} - d_{i_{k-1}}$ - (где $k > 1$) - длина k -й строки.]

$$p_{1_1} = 2$$

$$p_{1_2} = 1$$

$$p_{1_3} = 1$$

$$p_{1_4} = 1$$

$$p_{2_1} = 3$$

$$p_{2_2} = 2$$

$$p_{2_3} = 1$$

[Для каждого i вычисляются]

[вторые абсолютные приращения итерированных дефектов]

[(длины ступенек в столбчатой диаграмме; см. ниже):]

[$q_{i_k} = p_{i_k}$, при $k = l_i$, - длина ступеньки на верхнем этаже;]

[$q_{i_k} = p_{i_k} - p_{i_{k+1}}$, где $k < l_i$, - длина ступеньки]

[на k -м этаже (может быть нулевой).]

$$q_{1_1} = 1$$

$$q_{1_2} = 0$$

$$q_{1_3} = 0$$

$$q_{1_4} = 1$$

$$q_{2_1} = 1$$

$$q_{2_2} = 1$$

$$q_{2_3} = 1$$

<*Начало фрагмента Т4*>

[Для каждого собственного значения]
 [выводится отвечающая ему столбчатая диаграмма,]
 [с не нумерованными пока векторами (изображаемыми звездочками).]
 [Эти векторы должны изображать базис]
 [в соответствующем корневом подпространстве.]
 [Построение жорданова базиса будет производиться далее,]
 [путем “обработки” ранее построенных “необработанных”]
 [базисов в итерированных ядрах.]
 [Пока же вычисляются числовые параметры столбчатых диаграмм;]
 [заполнение диаграмм будет производиться ниже.]

[Принцип построения диаграммы: строки нумеруются снизу вверх;]
 [их количество (высота диаграммы) равняется показателю стабилизации;]
 [длины строк равны приращениям итерированных дефектов,]
 [они не возрастают при движении вверх;]
 [количество столбцов равно первому из итерированных дефектов,]
 [или, что то же, - геометрической кратности собственного значения;]
 [общее количество векторов равно]
 [алгебраической кратности собственного значения.]

<*Конец фрагмента Т4*>

$$DIAGR_1 = \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \quad * \end{bmatrix}$$

$$DIAGR_2 = \begin{bmatrix} * \\ * \quad * \\ * \quad * \quad * \end{bmatrix}$$

<*Начало фрагмента T5*>

[Для векторов в столбчатых диаграммах принимается]

[сквозная нумерация по следующему принципу:]

[1) порядок диаграмм определяется]

[ранее зафиксированным порядком собственных значений;]

[2) в каждой из диаграмм столбцы нумеруются слева направо.]

[(в порядке невозрастания высот), а векторы в столбцах – снизу вверх.]

<*Конец фрагмента T5*>

$$DIAGR_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \quad 5 \end{bmatrix}$$

$$DIAGR_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \quad 10 \\ 6 \quad 9 \quad 11 \end{bmatrix}$$

[Вычисляется жорданова нормальная форма $J=JS$ матрицы A]

[(в случае, если полный жорданов базис существует),]

[или же северо-западный жорданов блок JS размера ms]

[(если имеется лишь частичный жорданов базис).]

$$JS = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

<*Начало фрагмента Т6*>

[*Начинается обработка базисов в итерированных ядрах*]
 [*(в цикле по номеру i собственного значения);*]
 [*при этом номер итерации k изменяется от 1 до*]
 [*показателя стабилизации (высоты столбчатой диаграммы) l_j ;*]
 [*особо выделяются случаи $l_j = 1$ "одноэтажных" столбчатых диаграмм.*]

[*Обозначения:*]

[C_{i_k} - специальным образом конструируемое прямое дополнение]
 [*к предыдущему ядру $N_{i_{k-1}}$ в текущем ядре N_{i_k} : $N_{i_k} = N_{i_{k-1}} + C_{i_k}$,*]
 [*причем расчет начинается с верхнего этажа*]
 [*а нулевое ядро считается тривиальным;*]

[G_{i_k} - матрица, содержащая некоторый (искомый) базис в C_{i_k} ,]
 [*причем при $k < l_j$ образ $V_i C_{i_{k+1}}$*]

[*подпространства $C_{i_{k+1}}$ с последующим номером*]

[*при отображении, заданном матрицей V_i , должен содержаться*]
 [*(не обязательно строго) в дополнении C_{i_k} с текущим номером,*]

[*так что матрица G_{i_k} должна являться конкатенацией*]

[*подматрицы $V_i G_{i_{k+1}}$ и (возможно, пустой) подматрицы H_{i_k} ,*]

[*содержащей базис в некотором прямом дополнении D_{i_k}*]

[*к образу $V_i C_{i_{k+1}}$ в C_{i_k} : $C_{i_k} = V_i C_{i_{k+1}} + D_{i_k}$.*]

<*Конец фрагмента Т6*>

 [*Номер собственного значения: $i=1$.*]

[*Высота столбчатой диаграммы: $l_1 = 4$.*]

[*Номер этажа: $k=4$.*]

[*Определяем векторы верхнего этажа.*]

[*Формируется матрица-конкатенация M_{14} , двумя зонами которой являются*]

[*матрицы F_{13} и F_{14} , содержащие базисы в стабильном и предстабильном ядрах;*]

$$H_{1_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G_{1_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[Номер этажа: $k=3$.]

[Определяем векторы 3-го этажа.]

[Имеет место случай, когда на данном уровне]

[отсутствует ступенька, поскольку $q_{1_3} = 0$.]

[Вследствие этого, матрица H_{1_3} , отвечающая ступеньке, пуста..]

[а матрица G_{1_3} , отвечающая всему уровню,]

[находится умножением слева на матрицу B_1]

[матрицы G_{1_4} , отвечающей расположенному выше уровню.]

$$H_{1_3} = [\quad], G_{1_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

[Номер этажа: $k=2$.]

[Определяем векторы 2-го этажа.]

[Имеет место случай, когда на данном уровне]

[отсутствует ступенька, поскольку $q_{1_2} = 0$.]

[Вследствие этого, матрица H_{1_2} , отвечающая ступеньке, пуста..]

[а матрица G_{1_2} , отвечающая всему уровню,]

[находится умножением слева на матрицу B_1]

[матрицы G_{1_3} , отвечающей расположенному выше уровню.]

$$H_{1_2} = [\quad], G_{1_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

[Номер этажа: $k=1$.]

[Определяем векторы первого (нижнего) этажа.]

[Имеет место случай, когда на нижнем уровне есть ступенька длины $q_{1_1} = 1$.]

[Производим формирование двойной конкатенации M_{1_1} :]

[в левой зоне – матрица, содержащая образ $B_1 G_{1_2}$ базиса в подпространстве C_{1_2}]

[при отображении, заданном матрицей B_1 ;]

[в правой зоне – матрица, содержащая необработанный базис в первом ядре N_{1_1} .]

[Далее матрица M_{1_1} приводится к ступенчатому виду $M G_{1_1}$, после чего]

[формируется матрица H_{1_1} , содержащая]

[добавочные базисные векторы из правой зоны матрицы M_{1_1} ,]

[дополняющие до базиса в первом ядре N_{1_1} базис в образе $B_1 C_{1_2}$.]

[Матрица H_{1_1} отвечает ступеньке нижнего уровня, т. е. содержит базис в D_{1_1} ;]

[она является подматрицей второй зоны в исходной конкатенации M_{1_1} .]

[Кроме того, формируется матрица G_{1_1} , отвечающая]

[всему первому уровню, т. е. содержащая базис в C_{1_1} .]

[Матрица G_{1_1} является конкатенацией подматриц $B_1G_{1_2}$ и H_{1_1} .]

$$M_{1_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, MG_{1_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{1_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G_{1_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

[Номер собственного значения: $i=2$.]

[Высота столбчатой диаграммы: $l_2=3$.]

[Номер этажа: $k=3$.]

[Определяем векторы верхнего этажа.]

[Формируется матрица-конкатенация M_{2_3} , двумя зонами которой являются]

[матрицы F_{2_2} и F_{2_3} , содержащие базисы в стабильном и предстабильном ядрах;]

[затем эта матрица приводится к ступенчатому виду MG_{2_3} ,]

[по которому определяется матрица H_{2_3} , содержащая]

[добавочные базисные векторы из правой зоны матрицы M_{2_3} ,]

[дополняющие базис в предстабильном ядре N_{2_2} до базиса в стабильном ядре N_{2_3} ;]

[матрица H_{2_3} отвечает ступеньке верхнего уровня $k=3$,]

[т. е. содержит базис в D_{2_3} ; формируется также матрица G_{2_3} , отвечающая]

[всему рассматриваемому уровню, т. е. содержащая базис в C_{2_3} ;]

[для верхнего уровня эти матрицы совпадают: $G_{2_3} = H_{2_3}$.]

$$M_{2_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-17}{12} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-1}{4} & \frac{11}{12} & \frac{4}{3} \\ \frac{5}{17} & \frac{2}{17} & \frac{-5}{17} & \frac{7}{17} & \frac{4}{17} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{7}{17} & \frac{-4}{17} & \frac{-7}{17} & \frac{3}{17} & \frac{9}{17} & \frac{11}{12} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{4} & \frac{-5}{12} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-14}{17} & \frac{-26}{17} & \frac{-3}{17} & \frac{-6}{17} & \frac{-1}{17} & \frac{29}{12} & \frac{-11}{3} & \frac{-8}{3} & \frac{1}{4} & \frac{-23}{12} & \frac{-7}{3} \\ \frac{-7}{17} & \frac{4}{17} & \frac{7}{17} & \frac{-3}{17} & \frac{-9}{17} & \frac{-11}{12} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \\ \frac{20}{17} & \frac{8}{17} & \frac{-3}{17} & \frac{11}{17} & \frac{16}{17} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$MG_{2_3} = \begin{bmatrix} \frac{5}{17} & \frac{2}{17} & \frac{-5}{17} & \frac{7}{17} & \frac{4}{17} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-17}{12} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-1}{4} & \frac{11}{12} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{17}{12} & \frac{-5}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-3}{4} & \frac{-7}{60} & \frac{-11}{15} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{17}{12} & \frac{-5}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{-11}{12} & \frac{-5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{17}{12} & \frac{-5}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{-11}{12} & \frac{-4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{2_3} = \begin{bmatrix} \frac{-17}{12} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{11}{12} \\ \frac{29}{12} \\ \frac{-11}{12} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G_{2_3} = \begin{bmatrix} \frac{-17}{12} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{11}{12} \\ \frac{29}{12} \\ \frac{-11}{12} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[Номер этажа: $k=2$.]

[Определяем векторы 2-го этажа.]

[Имеет место случай, когда на 2-м уровне есть ступенька длины $q_{22} = 1$.]

[Производим формирование тройной конкатенации M_{22} :]

[в левой зоне – матрица, содержащая необработанный базис в ядре N_{21} ;]

[в центральной зоне – матрица, содержащая образ B_2G_{23}]

[базиса в подпространстве C_{23} при отображении, заданном матрицей B_2 ;]

[в правой зоне – матрица, содержащая необработанный базис в ядре N_{22} .]

[Далее матрица M_{22} приводится к ступенчатому виду MG_{22} , после чего]

[формируется матрица H_{22} , содержащая]

[добавочные базисные векторы из третьей (правой) зоны матрицы M_{22} ,]

[дополняющие до базиса в 2-м ядре N_{22}]

[базис в прямой сумме 1-го ядра N_{21} и образа B_2C_{23} .]

[Матрица H_{22} отвечает ступеньке 2-го уровня, т. е. содержит базис в D_{22} ;]

[она является подматрицей третьей зоны в исходной конкатенации M_{22} .]

[Кроме того, формируется матрица G_{22} , отвечающая]

[всему рассматриваемому уровню, т. е. содержащая базис в C_{22} .]

[Матрица G_{22} является конкатенацией подматриц B_2G_{23} и H_{22} .]

$$H_{2_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{17} \\ \frac{7}{17} \\ \frac{-14}{17} \\ \frac{-7}{17} \\ \frac{20}{17} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G_{2_2} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{17} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{17} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-14}{17} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-7}{17} \\ 1 & \frac{20}{17} \\ \frac{-5}{2} & 1 \\ \frac{7}{4} & 0 \\ \frac{-4}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{17}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

[Номер этажа: $k=1$.]

[Определяем векторы первого (нижнего) этажа.]

[Имеет место случай, когда на нижнем уровне есть ступенька длины $q_{2_1} = 1$.]

[Производим формирование двойной конкатенации M_{2_1} :]

[в левой зоне – матрица, содержащая образ $B_2 G_{2_2}$ базиса в подпространстве C_{2_2}]

[при отображении, заданном матрицей B_2 ;]

[в правой зоне – матрица, содержащая необработанный базис в первом ядре N_{2_1} .]

[Далее матрица M_{2_1} приводится к ступенчатому виду $M G_{2_1}$ после чего,]

[формируется матрица H_{2_1} , содержащая]

[добавочные базисные векторы из правой зоны матрицы M_{2_1} ,]

[дополняющие до базиса в первом ядре N_{2_1} базис в образе $B_2 C_{2_2}$.]

$$H_{2_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G_{2_1} = \begin{bmatrix} -\frac{17}{12} & \frac{1}{17} & 1 \\ 0 & \frac{2}{17} & 1 \\ 0 & \frac{2}{17} & 1 \\ \frac{17}{6} & \frac{-2}{17} & -4 \\ 0 & \frac{-2}{17} & -1 \\ -\frac{17}{12} & \frac{3}{17} & 4 \\ -\frac{17}{12} & \frac{1}{17} & 3 \\ -\frac{17}{12} & \frac{1}{17} & 1 \\ 0 & \frac{-4}{17} & 0 \\ \frac{17}{12} & \frac{1}{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

 [*Начинается подготовка окончательных ответов.*]

<*Начало фрагмента T7*>

[*Формируется матрица GS, содержащая (полный или частичный) жорданов базис.*]

[*Число столбцов в матрице GS равняется сумме $ms=11$*]

[*всех алгебраических кратностей;*]

[*в нее заносятся все векторы из всех матриц G_{i_k}*]

[*в порядке, предписанном столбчатыми диаграммами:*]

[*векторы из всех матриц G_{i_k} получают в матрице GS в точности те номера,*]

[*которые стоят в i -й столбчатой диаграмме на k -ом уровне.*]

[*Матрица GS представляет жорданов базис*]

[*в прямой сумме всех корневых подпространств.*]

<*Конец фрагмента T7*>

$$GS = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & \frac{-17}{12} & \frac{7}{4} & \frac{-17}{12} & \frac{1}{17} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{17} & \frac{5}{17} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{11}{12} & \frac{2}{17} & \frac{7}{17} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & \frac{17}{6} & \frac{-2}{3} & \frac{29}{12} & \frac{-2}{17} & \frac{-14}{17} & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{-11}{12} & \frac{-2}{17} & \frac{-7}{17} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-17}{12} & 1 & 1 & \frac{3}{17} & \frac{20}{17} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-17}{12} & \frac{-5}{2} & 0 & \frac{1}{17} & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & \frac{-17}{12} & \frac{7}{4} & 0 & \frac{1}{17} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-4}{3} & 0 & \frac{-4}{17} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & \frac{17}{12} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{17} & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{17}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[Поскольку в данном примере выполнено условие $ms=n$,]
 [то матрица GS является квадратной и содержит полный жорданов базис]
 [для данной матрицы A (во всем пространстве).]
 [Ее можно принять за искомую матрицу T]
 [(матрицу перехода от исходного базиса к жорданову базису).]
 [Вторая искомая матрица (жорданова нормальна J форма для матрицы A)]
 [уже найдена выше: $J=JS$.]

[Окончательные результаты:]

[Жорданова нормальная форма для матрицы A :]

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

[Жорданов базис содержится в матрице:]

$$T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & \frac{-17}{12} & \frac{7}{4} & \frac{-17}{12} & \frac{1}{17} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{17} & \frac{5}{17} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{11}{12} & \frac{2}{17} & \frac{7}{17} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & \frac{17}{6} & \frac{-2}{3} & \frac{29}{12} & \frac{-2}{17} & \frac{-14}{17} & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{-11}{12} & \frac{-2}{17} & \frac{-7}{17} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-17}{12} & 1 & 1 & \frac{3}{17} & \frac{20}{17} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-17}{12} & \frac{-5}{2} & 0 & \frac{1}{17} & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & \frac{-17}{12} & \frac{7}{4} & 0 & \frac{1}{17} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-4}{3} & 0 & \frac{-4}{17} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & \frac{17}{12} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{17} & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{17}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[Ее определитель $\det(T) = \frac{17}{216}$.]

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & \frac{-17}{12} & \frac{7}{4} & \frac{-17}{12} & \frac{1}{17} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{17} & \frac{5}{17} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{11}{12} & \frac{2}{17} & \frac{7}{17} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & \frac{17}{6} & \frac{-2}{3} & \frac{29}{12} & \frac{-2}{17} & \frac{-14}{17} & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{-11}{12} & \frac{-2}{17} & \frac{-7}{17} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-17}{12} & 1 & 1 & \frac{3}{17} & \frac{20}{17} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-17}{12} & \frac{-5}{2} & 0 & \frac{1}{17} & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & \frac{-17}{12} & \frac{7}{4} & 0 & \frac{1}{17} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-4}{3} & 0 & \frac{-4}{17} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & \frac{17}{12} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{17} & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{17}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§ 3.2. Случай наличия частичного жорданова базиса

```
> A:=Matrix([[-11, 1, -5, 1, -2, -2, -6, 11, 6, 3],
[-9, 3, -1, 5, 4, -8, 2, -1, -5, -1],
[-7, -7, -13, -3, -10, 6, -12, 27, 18, 5],
[-9, 7, 0, 5, 7, -11, 6, -6, -10, -3],
[8, -8, -2, -7, -10, 12, -8, 10, 13, 4],
[8, 7, 12, 5, 12, -13, 14, -34, -23, -5],
[2, -1, 2, 0, 0, 0, -4, -3, 2, 3],
[-7, -5, -8, -1, -7, -1, -12, 14, 12, 7],
[-1, -2, -4, -4, -5, 14, 0, 20, 9, -4],
[3, 1, 6, 4, 5, -13, -6, -22, -4, 9]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -11 & 1 & -5 & 1 & -2 & -2 & -6 & 11 & 6 & 3 \\ -9 & 3 & -1 & 5 & 4 & -8 & 2 & -1 & -5 & -1 \\ -7 & -7 & -13 & -3 & -10 & 6 & -12 & 27 & 18 & 5 \\ -9 & 7 & 0 & 5 & 7 & -11 & 6 & -6 & -10 & -3 \\ 8 & -8 & -2 & -7 & -10 & 12 & -8 & 10 & 13 & 4 \\ 8 & 7 & 12 & 5 & 12 & -13 & 14 & -34 & -23 & -5 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & 3 \\ -7 & -5 & -8 & -1 & -7 & -1 & -12 & 14 & 12 & 7 \\ -1 & -2 & -4 & -4 & -5 & 14 & 0 & 20 & 9 & -4 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 5 & -13 & -6 & -22 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

```
> JRD(A);
```

[Загружена матрица A с рациональными элементами.]

[Размер матрицы: n=10.]

[Матрице A отвечает линейный оператор φ,]

[действующий в линейном пространстве размерности 10 над полем Q.]

[Характеристический многочлен:]

$$h(\lambda) = \lambda^{10} + 11\lambda^9 + 46\lambda^8 + 82\lambda^7 + 28\lambda^6 - 56\lambda^5 + 112\lambda^4 + 352\lambda^3 + 64\lambda^2 - 384\lambda - 256$$

[Разложение характеристического многочлена]

[на неприводимые множители:]

$$h(\lambda) = (\lambda - 1) (\lambda^2 - 2\lambda + 2) (\lambda + 2)^7$$

[Мощность спектра: $s=2$.]

[Собственные значения и их алгебраические кратности:]

$$\lambda_1 = 1, m_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -2, m_2 = 7$$

[Сумма алгебраических кратностей собственных значений: $ms=8$.]

[Не существует полного жорданова базиса, только частичный.]

[Множитель характеристического многочлена, не имеющий корней в \mathbf{Q} :]

$$g(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

<*Повтор фрагмента T1 из предыдущего параграфа.*>

[Номер собственного значения: $i=1$.]

<* Повтор фрагмента T2 из предыдущего параграфа,
со следующими изменениями:

$$\lambda_1 = 1; m_1 = 1 .*>$$

[Номер итерации: $k=1$.]

$$B_{1_1} = \begin{bmatrix} -12 & 1 & -5 & 1 & -2 & -2 & -6 & 11 & 6 & 3 \\ -9 & 2 & -1 & 5 & 4 & -8 & 2 & -1 & -5 & -1 \\ -7 & -7 & -14 & -3 & -10 & 6 & -12 & 27 & 18 & 5 \\ -9 & 7 & 0 & 4 & 7 & -11 & 6 & -6 & -10 & -3 \\ 8 & -8 & -2 & -7 & -11 & 12 & -8 & 10 & 13 & 4 \\ 8 & 7 & 12 & 5 & 12 & -14 & 14 & -34 & -23 & -5 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -5 & -3 & 2 & 3 \\ -7 & -5 & -8 & -1 & -7 & -1 & -12 & 13 & 12 & 7 \\ -1 & -2 & -4 & -4 & -5 & 14 & 0 & 20 & 8 & -4 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 5 & -13 & -6 & -22 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$BGJ_{1_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F_{1_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, d_{1_1} = 1$$

[Показатель стабилизации для матрицы B_1 :]

$$l_1 = 1$$

[Номер собственного значения: $i=2$.]

<* Повтор фрагмента Т3 из предыдущего параграфа,
со следующими изменениями:

$$\lambda_2 = -2; m_2 = 7 \text{ .}^* >$$

[Номер итерации: $k=1$.]

$$B_{2_1} = \begin{bmatrix} -9 & 1 & -5 & 1 & -2 & -2 & -6 & 11 & 6 & 3 \\ -9 & 5 & -1 & 5 & 4 & -8 & 2 & -1 & -5 & -1 \\ -7 & -7 & -11 & -3 & -10 & 6 & -12 & 27 & 18 & 5 \\ -9 & 7 & 0 & 7 & 7 & -11 & 6 & -6 & -10 & -3 \\ 8 & -8 & -2 & -7 & -8 & 12 & -8 & 10 & 13 & 4 \\ 8 & 7 & 12 & 5 & 12 & -11 & 14 & -34 & -23 & -5 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 2 & 3 \\ -7 & -5 & -8 & -1 & -7 & -1 & -12 & 16 & 12 & 7 \\ -1 & -2 & -4 & -4 & -5 & 14 & 0 & 20 & 11 & -4 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 5 & -13 & -6 & -22 & -4 & 11 \end{bmatrix},$$

$$F_{2_4} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, d_{2_4} = 7$$

[Показатель стабилизации для матрицы B_2 :]

$$l_2 = 4$$

[Для каждого i вычисляются приращения итерированных дефектов]

[(длины строк столбчатой диаграммы; см. ниже):]

[$p_{i_1} = d_{i_1}$ - длина первой (нижней) строки;]

[$p_{i_k} = d_{i_k} - d_{i_{k-1}}$ - (где $k > 1$) - длина k -й строки.]

$$p_{1_1} = 1$$

$$p_{2_1} = 3$$

$$p_{2_2} = 2$$

$$p_{2_3} = 1$$

$$p_{2_4} = 1$$

[Для каждого i вычисляются]
 [вторые абсолютные приращения итерированных дефектов]
 [(длины ступенек в столбчатой диаграмме; см. ниже):]
 [$q_{i_k} = p_{i_k}$, при $k = l_i$, - длина ступеньки на верхнем этаже;]
 [$q_{i_k} = p_{i_k} - p_{i_{k+1}}$, где $k < l_i$, - длина ступеньки]
 [на k -м этаже (может быть нулевой).]

$$q_{1_1} = 1$$

$$q_{2_1} = 1$$

$$q_{2_2} = 1$$

$$q_{2_3} = 0$$

$$q_{2_4} = 1$$

<* Повтор фрагмента T4 из предыдущего параграфа.*>

$$DIAGR_1 = [*]$$

$$DIAGR_2 = \begin{bmatrix} * & & \\ * & & \\ * & * & \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

<* Повтор фрагмента T5 из предыдущего параграфа.*>

$$DIAGR_1 = [1]$$

$$H_{1_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G_{1_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[Номер собственного значения: $i=2$.]

[Высота столбчатой диаграммы: $l_2 = 4$.]

[Номер этажа: $k=4$.]

[Определяем векторы верхнего этажа.]

- [Формируется матрица-конкатенация M_{2_4} , двумя зонами которой являются]
 [матрицы F_{2_3} и F_{2_4} , содержащие базисы в стабильном и предстабильном ядрах;]
 [затем эта матрица приводится к ступенчатому виду MG_{2_4} ,]
 [по которому определяется матрица H_{2_4} , содержащая]
 [добавочные базисные векторы из правой зоны матрицы M_{2_4} ,]
 [дополняющие базис в предстабильном ядре N_{2_3} до базиса в стабильном ядре N_{2_4} ;]
 [матрица H_{2_4} отвечает ступеньке верхнего уровня $k=4$,]
 [т. е. содержит базис в D_{2_4} ; формируется также матрица G_{2_4} , отвечающая]
 [всему рассматриваемому уровню, т. е. содержащая базис в C_{2_4} ;]
 [для верхнего уровня эти матрицы совпадают: $G_{2_4} = H_{2_4}$.]

$$M_{2_4} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 2 & -2 & -2 & -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$MG_{2_4} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 2 & -2 & -2 & -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 6 & -3 & 6 & 5 & 3 & 3 & 1 & 3 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{13}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{12}{7} & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{5} & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{8}{9} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{2_4} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G_{2_4} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[Номер этажа: $k=3$.]

[Определяем векторы 3-го этажа.]

[Имеет место случай, когда на данном уровне]

[отсутствует ступенька, поскольку $q_{23} = 0$.]

[Вследствие этого, матрица H_{23} , отвечающая ступеньке, пуста.]

[а матрица G_{23} , отвечающая всему уровню,]

[находится умножением слева на матрицу B_2]

[матрицы G_{24} , отвечающей расположенному выше уровню.]

$$H_{2_3} = [\quad], G_{2_3} = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \\ 0 \\ 16 \\ -16 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

[Номер этажа: $k=2$.]

[Имеет место случай, когда на 2-м уровне есть ступенька длины $q_{22} = 1$.]

[Производим формирование тройной конкатенации M_{22} :]

[в левой зоне – матрица, содержащая необработанный базис в ядре N_{21} ;]

[в центральной зоне – матрица, содержащая образ $B_2 G_{23}$]

[базиса в подпространстве C_{23} при отображении, заданном матрицей B_2 ;]

[в правой зоне – матрица, содержащая необработанный базис в ядре N_{22} .]

[Далее матрица M_{22} приводится к ступенчатому виду $M G_{22}$, после чего]

[формируется матрица H_{22} , содержащая]

[добавочные базисные векторы из третьей (правой) зоны матрицы M_{22} ,]

[дополняющие до базиса в 2-м ядре N_{22}]

[базис в прямой сумме 1-го ядра N_{2_1} и образа $B_2C_{2_3}$.]

[Матрица H_{2_2} отвечает ступеньке 2-го уровня, т. е. содержит базис в D_{2_2} ;]

[она является подматрицей третьей зоны в исходной конкатенации M_{2_2} .]

[Кроме того, формируется матрица G_{2_2} , отвечающая]

[всему рассматриваемому уровню, т. е. содержащая базис в C_{2_2} .]

[Матрица G_{2_2} является конкатенацией подматриц $B_2G_{2_3}$ и H_{2_2} .]

$$M_{2_2} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{-7}{2} & -2 & 2 & 4 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & -3 & 3 & 15 & 12 & -3 & 12 & 9 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -13 & -11 & 4 & -10 & -8 \\ -4 & -8 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & \frac{17}{2} & 4 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$MG_{2_2} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{-7}{2} & -2 & 2 & 4 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{9}{2} & 3 & -3 & 3 & 3 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-17}{3} & \frac{-14}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-17}{3} & \frac{-11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -19 & -16 & 4 & -16 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 6 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{2_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \\ -13 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G_{2_2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 15 \\ 0 & -13 \\ 5 & 1 \\ -5 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

[Номер этажа: $k=1$.]

[Определяем векторы первого (нижнего) этажа.]

[Имеет место случай, когда на нижнем уровне есть ступенька длины $q_{2_1} = 1$.]

[Производим формирование двойной конкатенации M_{2_1} :]

[в левой зоне – матрица, содержащая образ $B_2 G_{2_2}$ базиса в подпространстве C_{2_2}]

[при отображении, заданном матрицей B_2 ;]

[в правой зоне – матрица, содержащая необработанный базис в первом ядре N_{2_1} .]

[Далее матрица M_{2_1} приводится к ступенчатому виду $M G_{2_1}$ после чего,]

[формируется матрица H_{2_1} , содержащая]

[добавочные базисные векторы из правой зоны матрицы M_{2_1} ,]

[дополняющие до базиса в первом ядре N_{2_1} базис в образе $B_2 C_{2_2}$.]

[Матрица H_{2_1} отвечает ступеньке нижнего уровня, т. е. содержит базис в D_{2_1} ;]

[она является подматрицей второй зоны в исходной конкатенации M_{2_1} .]

[Кроме того, формируется матрица G_{2_1} , отвечающая]

[всему первому уровню, т. е. содержащая базис в C_{2_1} .]

[Матрица G_{2_1} является конкатенацией подматриц $B_2 G_{2_2}$ и H_{2_1} .]

$$M_{2_1} = \begin{bmatrix} -2 & 45 & -1 & \frac{-7}{2} & -2 \\ -3 & 57 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 7 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 76 & -4 & -8 & -4 \\ 4 & -69 & 5 & \frac{17}{2} & 4 \\ 0 & -14 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -33 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -47 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, MG_{2_1} = \begin{bmatrix} -2 & 45 & -1 & \frac{-7}{2} & -2 \\ 0 & \frac{-21}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{2_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G_{2_1} = \begin{bmatrix} -2 & 45 & -1 \\ -3 & 57 & -3 \\ 0 & 7 & 1 \\ -4 & 76 & -4 \\ 4 & -69 & 5 \\ 0 & -14 & -1 \\ 1 & -33 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 14 & 0 \\ 1 & -47 & 0 \end{bmatrix}$$

 [*Начинается подготовка окончательных ответов.*]

<* Повтор фрагмента Г7 из предыдущего параграфа.*>

$$GS = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 10 & -1 & 45 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & 14 & 1 & 57 & 15 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -13 & 1 \\ 1 & -4 & 5 & 16 & 0 & 76 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -5 & -16 & 0 & -69 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -14 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & -33 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & -47 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[Поскольку в данном примере имеет место неравенство $ms < n$,]
 [то матрица GS не является квадратной и содержит]
 [лишь частичный жорданов базис для данной матрицы A]
 [(не во всем пространстве, но лишь в корневой сумме).]
 [Рассмотрим инвариантное относительно заданного оператора φ]
 [прямое дополнение Y к корневой сумме, которое представляется]
 [как нуль-пространство матрицы gA ,]
 [которая является значением $g(A)$ на матрице A многочлена g]
 [(не имеющего корней в \mathbf{Q} множителя характеристического многочлена h).]

[Значение многочлена g на матрице A :]

$$gA = \begin{bmatrix} 44 & -24 & 3 & -7 & -9 & 13 & 8 & -11 & -1 & -4 \\ 33 & -38 & -21 & -27 & -42 & 45 & -36 & 57 & 60 & 18 \\ 24 & 24 & 49 & 9 & 33 & -25 & 48 & -97 & -73 & -24 \\ 32 & -59 & -26 & -27 & -58 & 61 & -58 & 84 & 87 & 29 \\ -26 & 65 & 38 & 37 & 74 & -67 & 70 & -108 & -105 & -35 \\ -30 & -24 & -45 & -21 & -45 & 63 & -72 & 137 & 113 & 36 \\ -11 & 5 & -13 & -2 & -2 & 8 & 6 & 27 & 11 & -3 \\ 24 & 11 & 20 & -1 & 16 & 11 & 26 & -26 & -19 & -13 \\ 6 & 13 & 25 & 22 & 29 & -74 & 46 & -111 & -94 & -23 \\ -17 & -8 & -38 & -24 & -31 & 82 & -40 & 138 & 105 & 20 \end{bmatrix}$$

[Матрицы B_Y , содержащая базис в нуль-пространстве Y матрицы gA :]

$$B_Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[Матрица $T=(GS | BY)$, содержащая частично жорданов базис для матрицы A :]

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 10 & -1 & 45 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 14 & 1 & 57 & 15 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -13 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -4 & 5 & 16 & 0 & 76 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & -16 & 0 & -69 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -14 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & -33 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 14 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & -47 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[Частично жорданова нормальная форма J для матрицы A]

[находится с использованием T как матрицы перехода]

[от исходного (естественного) базиса к найденному частично жорданову:]

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{2} & 6 \end{bmatrix}$$

[Матрица J имеет блочно-диагональный вид]

[с двумя диагональными блоками: $J = \text{diag}(JS, K)$;]

[блок JS порядка 8 отвечает в найденном базисе сужению]

[данного линейного оператора на его корневую сумму;]

[блок K порядка 2 отвечает сужению оператора]

[на инвариантное прямое дополнение Y к корневой сумме:]

$$K = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{13}{2} & 6 \end{bmatrix}$$

[Окончательные результаты:]

[Частично жорданова нормальная форма для матрицы A :]

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{2} & 6 \end{bmatrix}$$

[Частично жорданов базис содержится в матрице:]

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 10 & -1 & 45 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 14 & 1 & 57 & 15 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -13 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -4 & 5 & 16 & 0 & 76 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & -16 & 0 & -69 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -14 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & -33 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 14 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & -47 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[Ее определитель $\det(T) = \frac{-49}{8}$.]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{2} & 6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 10 & -1 & 45 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 14 & 1 & 57 & 15 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -13 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -4 & 5 & 16 & 0 & 76 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & -16 & 0 & -69 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -14 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & -33 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 14 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & -47 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

§ 3.3. Задачи для "полуручного" решения

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ
(матрицы 7×7 ; 12 вариантов)

$$A1 := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A2 := \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -4 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A3 := \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & -1 & 4 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & 5 & 1 & -3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A4 := \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -4 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A5 := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A6 := \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 & -4 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 4 & -5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A7 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -6 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -4 & -1 & 1 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A8 := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -2 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A9 := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad A10 := \begin{bmatrix} 2 & -7 & 3 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & -4 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A11 := \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -9 & 5 & 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & -6 & 4 & 0 & 3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad A12 := \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -4 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ОТВЕТЫ

(во всех вариантах существует полный жорданов базис)

$$J1, T1 := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J2, T2 := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J3, T3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 & \frac{-3}{2} \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 0 & \frac{-1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J4, T4 := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J5, T5 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J6, T6 := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J7, T7 := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J8, T8 := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J9, T9 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J10, T10 := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J11, T11 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J12, T12 := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Глава 4

ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

§ 4.1. Линейные пространства

4.1.1. Линейное пространство над полем P — это множество V (элементы которого называются *векторами*) с заданными на нем алгебраическими действиями *сложения* векторов и *умножения* вектора на *скаляр* (из поля P), в предположении выполнения ряда аксиом. Важнейшим примером линейного пространства служит *арифметическое* линейное пространство $V = P^n$.

См. [LA], § 1; [A], §§ 1, 3.

4.1.2. Арифметическое линейное пространство над полем P — это множество $V = P^n$ *векторов-столбцов* \bar{x} высоты n , составленных из элементов $x_i \in P, i = 1, \dots, n$, с *покомпонентными* алгебраическими действиями сложения и умножения на скаляр; аналогично определяется арифметическое линейное пространство, составленное из *векторов-строк* \bar{x}^t ; *арифметические векторы* (и только они) *надчеркиваются* в обозначениях.

См. [LA], § 1; [A], § 1.

4.1.3. Конечномерное линейное пространство — это такое линейное пространство, в котором существует (конечная) *порождающая система векторов*; это равносильно существованию (конечного) *базиса*. В конечномерном линейном пространстве любая *порождающая* система векторов *содержит* некоторый базис, а любая *линейно независимая* система векторов *содержится* в некотором базисе; базисы являются *минимальными порождающими* и *максимальными линейно независимыми* системами векторов.

См. [LA], §§ 2, 4.

4.1.4. Размерность конечномерного линейного пространства определяется как количество векторов в некотором (и, следовательно, в

любом) *базисе* этого пространства; говорят также, что размерность — это *мощность* базиса; размерность линейного пространства V обозначается $\dim(V)$.

См. [LA], § 5.

4.1.5. Координатный изоморфизм конечномерного линейного пространства V определяется выбором *базиса* $\mathcal{B} = [b_1, \dots, b_n]$ в этом пространстве и представляет собой *линейный изоморфизм* $\beta : V \xrightarrow{\cong} P^n$ пространства V на арифметическое линейное пространство P^n , сопоставляющий произвольному вектору $x \in V$ его *координатный столбец* $\beta(x) = \bar{x}$ относительно базиса \mathcal{B} .

См. [LA], § 6.

4.1.6. Арифметизация конечномерного линейного пространства V (над полем P) — это отождествление (после *фиксации* некоторого базиса $\mathcal{B} = [b_1, \dots, b_n]$) линейного пространства V с арифметическим линейным пространством P^n с помощью *координатного изоморфизма*: $V \equiv P^n$; при этом отождествляются произвольный вектор $x \in V$ и соответствующий *координатный столбец* $\bar{x} \in P^n : x \equiv \bar{x}$; зафиксированный базис \mathcal{B} отождествляется с *естественным базисом* \mathcal{E}_n пространства $P^n : \mathcal{B} \equiv \mathcal{E}_n$. Как правило, решению любой расчетной задачи в линейной алгебре предшествует арифметизация задействованных в ней линейных пространств и линейных отображений.

См. [LA], §§ 6–7.

§ 4.2. Системы векторов в линейных пространствах

4.2.1. Система векторов в линейном пространстве V — это *список* (упорядоченный конечный набор) векторов; используется обозначение: $\mathcal{A} = [a_1, \dots, a_k]$; $a_i \in V$; $i = 1, \dots, k$; не исключается *пустая* система $\mathcal{A} = []$. В *арифметическом* линейном пространстве $V = P^n$ система векторов $\mathcal{A} = [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k]$ может быть задана своей *матрицей* $A = (\bar{a}_1 | \dots | \bar{a}_k)$ размера $n \times k$.

См. [LA], § 2; [A], § 8.

4.2.2. Линейная комбинация системы векторов $\mathcal{A} = [a_1, \dots, a_k]$ представляет собой *выражение* вида $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$, где коэффициенты $\lambda_i \in P$; $i = 1, \dots, k$; если в этом выражении выполнить действия, то получится вектор — *значение* линейной комбинации/

См. [LA], § 2.

4.2.3. Линейная оболочка системы векторов $\mathcal{A} = [a_1, \dots, a_k]$ в линейном пространстве V — это множество значений всевозможных *линейных комбинаций* для \mathcal{A} ; обозначение: $\langle \mathcal{A} \rangle$; вектор $b \in V$ принадлежит линейной оболочке $\langle \mathcal{A} \rangle$ тогда и только тогда, когда он *линейно выражается* через систему \mathcal{A} , т. е. представляется в виде значения некоторой *линейной комбинации* векторов из \mathcal{A} ; множество $\langle \mathcal{A} \rangle$ является *линейным подпространством* в пространстве V , причем *наименьшим* среди всех подпространств, содержащих все векторы из \mathcal{A} ; линейная оболочка пустой системы векторов есть нулевое подпространство в V .

В *арифметическом* линейном пространстве $V = P^n$ вектор \bar{b} принадлежит линейной оболочке системы векторов $\mathcal{A} = [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k]$ тогда и только тогда, когда *совместна* система линейных уравнений $A \cdot \bar{\lambda} = \bar{b}$, где A — $(n \times k)$ -матрица, соответствующая \mathcal{A} , $\bar{\lambda}$ — вектор-столбец (высоты k), составленный из коэффициентов линейной комбинации.

См. [LA], § 2; [A], § 8.

4.2.4. Порождающая система векторов в линейном пространстве V (над полем P) — это такая система векторов, для которой линейная оболочка совпадает со всем пространством V , или, что равносильно, любой вектор $b \in V$ линейно выражается через систему векторов \mathcal{A} . Рассматриваются также порождающие системы векторов для *линейных подпространств* в пространстве V ; всякая система векторов порождает свою *линейную оболочку*.

См. [LA], § 2.

4.2.5. Линейно зависимая система векторов — это такая система векторов, для которой существует линейная комбинация с нулевым значением, не все коэффициенты которой равны нулю.

В *арифметическом* линейном пространстве $V = P^n$ система векторов \mathcal{A} линейно зависима тогда и только тогда, когда существует *нетривиальное* (ненулевое) решение для однородной системы линейных уравнений $A \cdot \bar{\lambda} = \bar{0}$, где A — матрица, соответствующая данной системе векторов, $\bar{\lambda} \in P^k$; равносильное условие: *ранг* матрицы A меньше количества столбцов.

См. [LA], § 3; [A], §§ 9, 12.

4.2.6. Линейно независимая система векторов — это такая система векторов, для которой значение линейной комбинации может равняться нулевому вектору лишь в том случае, когда все коэффициенты этой комбинации равны нулю; пустая система векторов считается линейно независимой; линейно независимая система векторов является *базисом* своей *линейной оболочке*.

В *арифметическом* линейном пространстве $V = P^n$ система векторов \mathcal{A} линейно независима тогда и только тогда, когда имеет лишь *тривиальное* (нулевое) решение однородная система линейных уравнений $A \cdot \bar{\lambda} = \bar{0}$, где A — матрица, соответствующая \mathcal{A} ; равносильное условие: *ранг* матрицы A равен количеству столбцов.

См. [LA], § 3; [A], §§ 9, 12.

4.2.7. Базис в линейном пространстве V (над полем P) — это конечная система векторов $\mathcal{B} = [b_1, \dots, b_n]$ в пространстве V , которая: 1) *порождает* V , т. е. линейная оболочка $\langle \mathcal{B} \rangle = V$; 2) *линейно независима*. Указанные два условия равносильны тому, что всякий вектор $x \in V$ *однозначно разлагается* по \mathcal{B} , т. е. существуют однозначно определенные коэффициенты $x_i \in P$; $i = 1, \dots, n$, такие, что $x = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$; эти коэффициенты называются *координатами* вектора x относительно базиса \mathcal{B} ; они образуют *координатный вектор-столбец* $\bar{x} \in P^n$. В любом конечномерном линейном пространстве *существует* базис и все базисы в одном и том же пространстве имеют одинаковое количество векторов (*равномощны*).

См. [LA], §§ 4–6.

4.2.8. Естественный базис в арифметическом линейном пространстве $V = P^n$ представляет собой систему $\mathcal{E}_n = [\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n]$, составленную из единичных векторов \bar{e}_i ; $i = 1, \dots, n$, в каждом из которых все компоненты равны нулю, кроме одной (ее номер совпадает с номером вектора), которая равна единице.

См. [LA], § 4; [A], § 8.

4.2.9. Матрица перехода от одного базиса $\mathcal{B} = [b_1, \dots, b_n]$ в линейном пространстве V к другому базису $\mathcal{B}' = [b'_1, \dots, b'_n]$ в том же пространстве есть квадратная обратимая ($n \times n$)-матрица $T = (\bar{b}'_1 | \dots | \bar{b}'_n)$, составленная из *координатных векторов-столбцов* \bar{b}'_j , отвечающих "новым" базисным векторам b'_j в "старом" базисе \mathcal{B} ; элементы матрицы T могут быть определены формулой $t_{ij} = [b'_j]_i$, где в правой части стоит i -я координата вектора b'_j ($i, j = 1, \dots, n$).

В частном случае *арифметического* линейного пространства $V = P^n$ наличие выделенного (*естественного*) базиса \mathcal{E}_n позволяет всякий базис $\mathcal{B} = [\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n]$ представить с помощью *невырожденной* матрицы $B = (\bar{b}_1 | \dots | \bar{b}_n)$, которую можно рассматривать как матрицу перехода от \mathcal{E}_n к \mathcal{B} . Если базису \mathcal{B}' аналогичным образом сопоставлена матрица B' , то матрица T перехода от \mathcal{B} к \mathcal{B}' может быть выражена следующей формулой: $T = B^{-1} \cdot B'$, а матрица $S = T^{-1}$, описывающая обратный

переход, — формулой: $S = (B')^{-1} \cdot B$.

См. [LA], § 7; [A], § 14.

4.2.10. Арифметизация матриц перехода между базисами в n -мерном линейном пространстве V осуществляется (после фиксации в V некоторого базиса \mathcal{B} и отождествлений $V \equiv P^n$; $\mathcal{B} \equiv \mathcal{E}_n$) следующим образом: базисы \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 описываются соответствующими невырожденными матрицами B_1 и B_2 ; матрицей перехода от \mathcal{B}_1 к \mathcal{B}_2 служит матрица $T = B_1^{-1} \cdot B_2$.

См. [LA], § 7.

§ 4.3. Линейные подпространства

4.3.1. Линейное подпространство в линейном пространстве V (над полем P) — это непустое подмножество $W \subseteq V$, устойчивое относительно алгебраических действий, заданных в V ; используется обозначение: $W \leq V$; линейное подпространство обязательно содержит нулевой вектор; оно само является линейным пространством над P . Среди линейных подпространств выделяются *тривиальное* (нулевое, наименьшее) подпространство $W = O$ и *наибольшее* подпространство $W = V$.

В случае *арифметического* линейного пространства $V = P^n$ применяются *два основных способа* задания линейных подпространств:

1) $W \leq P^n$ представляется как *подпространство решений* однородной системы линейных уравнений $A \cdot \bar{x} = \bar{0}$, где A — $(m \times n)$ -матрица (с элементами из P), $\bar{x} \in P^n$; используется обозначение: $W = L_A^0$;

2) $W \leq P^n$ представляется как *линейная оболочка* системы векторов-столбцов заданной $(n \times k)$ -матрицы G (с элементами из P); обозначение: $W = R_G = \langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_k \rangle$.

См. [LA], §§ 1, 10; [A], § 13.

4.3.2. Арифметизация линейных подпространств осуществляется, если предварительно арифметизировано данное (n -мерное) линейное пространство V , т. е. если в V зафиксирован некоторый базис \mathcal{B} и произведено отождествление $V \equiv P^n$. Тогда каждое линейное подпространство $W \leq V$ может быть задано любым из следующих двух способов.

При **первом способе** задания W описывается как множество решений однородной системы линейных уравнений $A \cdot \bar{x} = \bar{0}$, где A — некоторая $(m \times n)$ -матрица; используется обозначение $W = L_A^0$ и сле-

дующая терминология: W представляется как *нуль-пространство* (или: *ядро*) матрицы A . Указанная система линейных уравнений может быть заменена на равносильную $A' \cdot \bar{x} = \bar{0}$, где $A' - (r \times n)$ -матрица, *вид Жордана - Гаусса* матрицы A ; $r = \text{rank}(A)$; представление $W = L_A^0$ можно назвать "экономным" заданием W первым способом (поскольку соответствующая однородная система не содержит "лишних" уравнений; матрица A' имеет *полный ранг по строкам*; особый случай: *наибольшее* подпространство $W = V$ "экономно" задается *пустой* системой уравнений). Определяя *базисные решения* рассматриваемой однородной системы линейных уравнений и формируя из них *фундаментальную матрицу* F размера $(n - r) \times n$, мы переходим к представлению W *вторым способом* (см. ниже): $W = R_F$, причем это представление, по построению, оказывается "экономным", поскольку матрица F имеет *полный ранг по столбцам*. *Размерность* данного подпространства определяется формулой: $\dim(W) = n - r$.

Вторым способом задания линейного подпространства $W \leq V$ считается представление W в виде *линейной оболочки* $W = \langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_k \rangle$ системы векторов-столбцов некоторой $(n \times k)$ -матрицы $G = (\bar{g}_1 | \dots | \bar{g}_k)$; используется обозначение $W = R_G$ и терминология: W представляется как *пространство столбцов* (или: *образ*) матрицы G . Можно перейти к "экономному" заданию вторым способом $W = R_B$, если привести матрицу G к *ступенчатому* виду G' и определить (по расположению ступенек) $(n \times r)$ -подматрицу B матрицы G , содержащую некоторый *базис* для W ($r = \text{rank}(G) = \dim(W)$); матрица B имеет *полный ранг по столбцам*; особый случай наступает для *тривиального* подпространства $W = O$: матрица B оказывается *пустой*).

Переход от второго ("экономного") способа задания $W = R_B$ к первому (тоже "экономному") способу задания $W = L_A^0$ осуществляется следующим образом: матрица A размера $(n - r) \times n$ находится *транспонированием* ($A = F^t$) фундаментальной матрицы F для *вспомогательной* однородной системы линейных уравнений $B^t \cdot \bar{a} = \bar{0}$.

При втором "экономном" способе задания $W = R_B$ количество столбцов в матрице B равно размерности W , при первом "экономном" способе задания $W = L_A^0$ количество уравнений (т. е. количество строк в матрице A) равно *коразмерности* W .

См. [LA], § 10; [A], §§ 5, 13.

4.3.3. Сумма линейных подпространств W_i ($i = 1, \dots, s$) в линейном пространстве V (над полем P) представляет собой линейное подпространство $W' \leq V$, составленное из векторов вида $x = y_1 + \dots + y_s$,

где векторы $y_i \in W_i$ ($i = 1, \dots, s$); сумма обозначается символом $W' = W_1 + \dots + W_s$ и может быть описана как *наименьшее* из линейных подпространств в V , содержащих все данные подпространства. В случае *конечномерности* W_i ($i = 1, \dots, s$) их сумма W' также является конечномерным подпространством. Для $s = 2$ размерность суммы находится по *формуле Грассмана* $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$.

После арифметизации задачи, связанной с выбором некоторого базиса \mathcal{B} во всем пространстве V , и после "экономного" представления каждого из двух данных подпространств вторым способом ($W_1 = R_{B_1}$, $W_2 = R_{B_2}$; матрицы B_1, B_2 имеют полный ранг по столбцам и представляют в арифметизированном виде базисы $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$) сумма $W_3 = W_1 + W_2$ может быть представлена "экономно" вторым способом: $W_3 = R_{B_3}$, где $B_3 = (B_1 | C)$, а C — подматрица в B_2 , содержащая "добавочные" векторы, дополняющие \mathcal{B}_1 до базиса в W_3 , она определяется по расположению ступенек во второй зоне ступенчатого вида конкатенации $(B_1 | B_2)$.

См. [LA], §§ 8, 10.

4.3.4. Прямая сумма линейных подпространств — это частный случай суммы подпространств, характеризующийся тем, что всякий вектор $x \in W' = W_1 + \dots + W_s$ *однозначно* представляется в виде $x = y_1 + \dots + y_s$; $y_i \in W_i$; $i = 1, \dots, s$. Для прямых сумм используется обозначение $W' = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$; критерием прямоты является *независимость в совокупности* данных подпространств, т. е. тот факт, что каждое из них имеет *тривиальное* (нулевое) пересечение с суммой остальных. Для прямой (и только для прямой) суммы конечномерных подпространств имеет место формула для размерности: $\dim(W') = \dim(W_1) + \dots + \dim(W_s)$ и базис \mathcal{B}' в подпространстве W' может быть выбран *приспособленным* к прямой сумме, т. е. в виде $\mathcal{B}' = [\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_s]$, где \mathcal{B}_i — некоторый базис в слагаемом W_i .

См. [LA], § 9.

4.3.5. Полная прямая сумма линейных подпространств представляет собой частный случай прямой суммы, характеризующийся тем, что $W_1 \oplus \dots \oplus W_s = V$ (сумма совпадает со всем пространством). При $s = 2$ факт $W_1 \oplus W_2 = V$ может быть выражен следующим образом: линейные подпространства W_1 и W_2 являются *взаимно дополнительными* в пространстве V .

См. [LA], § 9.

4.3.6. Операторы вложения и проектирования для полной прямой суммы линейных подпространств $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$ определяются следующим образом.

Линейные гомоморфизмы *вложения* $\alpha_j : W_j \rightarrow V$ ($j = 1, \dots, s$) задаются формулами $\alpha_j(y_j) = y_j$; $y_j \in W_j$ (всякому вектору y_j из подпространства W_j сопоставляется этот же самый вектор, но рассматриваемый как элемент пространства V). Гомоморфизмы *проектирования* $\pi_i : V \rightarrow W_i$ ($i = 1, \dots, s$) задаются формулами $\pi_i(x) = y_i$; $x \in V$; $x = y_1 + \dots + y_s$ (вектору x из V сопоставляется i -я компонента в его — однозначно определенном — разложении в сумму s векторов y_i , каждый из которых принадлежит соответствующему подпространству W_i). Вложения являются *мономорфизмами*, а проектирования — *эпиморфизмами*. Имеют место формулы: 1) $\pi_i \circ \alpha_i = \varepsilon_i$, где ε_i — тождественный оператор пространства W_i ; 2) $\pi_i \circ \alpha_j = o$ ($i \neq j$), где o — нулевой оператор из W_j в W_i .

Рассматриваются также **проекторы** (линейные *эндоморфизмы* проектирования); это — операторы $\rho_i : V \rightarrow V$, определяемые формулами $\rho_i = \alpha_i \circ \pi_i$ ($i = 1, \dots, s$), или, на элементе $x \in V$: $\rho_i(x) = y_i$, где y_i рассматривается как элемент V . Проекторы обладают следующими свойствами: 4) $\rho_i^2 = \rho_i$; 5) $\rho_i \circ \rho_j = o$ ($i \neq j$); 6) $\rho_1 + \dots + \rho_s = \varepsilon$, где ε — тождественный оператор пространства V .

См. [LA], § 9.

4.3.7. Прямое дополнение к линейному подпространству W в линейном пространстве V определяется как такое линейное подпространство $W' \leq V$, что V представляется в виде *полной прямой суммы*: $V = W \oplus W'$. В случае конечномерного пространства V для любого $W \leq V$ существует прямое дополнение; в нетривиальных случаях оно определено *неоднозначно*; *размерность* прямого дополнения находится по формуле $\dim(W') = \dim(V) - \dim(W)$; это число называется также *кочамерностью* для данного линейного подпространства: $\text{codim}(W) = \dim(W')$. Любое линейное подпространство $U \leq V$ *независимое* с данным (т. е. такое, что пересечение $W \cap U = O$) может быть включено ($U \leq W'$) в некоторое прямое дополнение W' к V .

Определяется также прямое дополнение к линейному подпространству $W_1 \leq V$ в более широком подпространстве $W_2 \leq V$, как такое подпространство $W'_1 \leq W_2$, что $W_1 \oplus W'_1 = W_2$. Прямые дополнения (вместе с базисами в них) вычисляются на практике методом *продолжения базисов*.

См. [LA], §§ 5, 9, 10.

4.3.8. Продолжение базиса \mathcal{B}_1 в линейном подпространстве W_1 в конечномерном линейном пространстве V до базиса в некотором (более широком) подпространстве $W_2 \leq V$ осуществляется, если задан какой-

либо базис \mathcal{B}_2 в W_2 , путем отыскания в (избыточной) порождающей W_2 системе векторов $[\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2]$ линейно независимой подсистемы $\mathcal{B}'_2 = [\mathcal{B}_1, \mathcal{C}]$, содержащей \mathcal{B}_1 ; при этом система "добавочных" векторов \mathcal{C} представляет собой базис в некотором прямом дополнении W'_1 к подпространству W_1 в подпространстве W_2 ($W_1 \oplus W'_1 = W_2$).

После арифметизации задачи, связанной с выбором некоторого базиса \mathcal{B} во всем пространстве V , базисы \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 будут представлены матрицами B_1 и B_2 соответственно и задача сведется к приведению к ступенчатому виду матрицы-конкатенации $(B_1 | B_2)$; по ступенькам во второй зоне определяется подматрица C матрицы B_2 , представляющая базис в некотором W'_1 ; искомый базис в W_2 будет представлен конкатенацией $B'_2 = (B_1 | C)$.

См. [LA], §§ 5, 10.

4.3.9. Коразмерность линейного подпространства W в n -мерном линейном пространстве V определяется как разность $\text{codim}(W) = n - \dim(W)$; эта числовая характеристика совпадает с размерностью произвольного прямого дополнения W' к подпространству W и связана с "экономным" заданием W первым способом (при арифметизации V и W): $\text{codim}(W)$ равняется количеству линейно независимых однородных линейных уравнений, задающих W .

См. [LA], § 10.

4.3.10. Пересечение линейных подпространств (двух или любого, конечного или бесконечного, семейства) снова является линейным подпространством, причем — наибольшим среди подпространств, содержащихся в каждом из данных. В случае двух линейных подпространств $W_1, W_2 \leq V$ в конечномерном линейном пространстве V базис в их пересечении $W_0 = W_1 \cap W_2$ можно найти после арифметизации данных подпространств по первому способу: $W_1 = L_{A_1}^0$, $W_2 = L_{A_2}^0$; тогда W_0 также окажется заданным первым способом: $W_0 = L_{A_0}^0$; где A_0 — вертикальная конкатенация матриц A_1 и A_2 .

См. [LA], § 10.

§ 4.4. Линейные отображения (гомоморфизмы)

4.4.1. Линейное отображение (синонимы: линейный оператор, линейный гомоморфизм) — отображение $\varphi : V \rightarrow W$ из линейного пространства V в линейное пространство W (оба — над полем P), со-

гласованное с алгебраическими действиями сложения и умножения на скаляр: $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$; $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$; $x, y \in V$; $\lambda \in P$; из этих свойств вытекает свойство *сохранения нуля*: $\varphi(0) = 0$. Множество $\mathcal{L}(V, W)$ всех линейных гомоморфизмов из пространства V в пространство W само является линейным пространством (над P); в случае *конечномерных* пространств V и W ($\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$) пространство $\mathcal{L}(V, W)$ также конечномерно: $\dim(\mathcal{L}(V, W)) = mn$. Композиция двух линейных отображений также является линейным отображением; если линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$ *обратимо* (т. е. существует отображение $\psi : W \rightarrow V$ такое, что композиции $\psi \circ \varphi$ и $\varphi \circ \psi$ являются тождественными отображениями), то *обратное* отображение $\psi = \varphi^{-1}$ также является линейным.

См. [LA], § 1, 10.

4.4.2. Матрица линейного отображения (оператора, гомоморфизма) $\varphi : V \rightarrow W$ из n -мерного линейного пространства V в m -мерное линейное пространство W (над полем P) относительно некоторых базисов $\mathcal{B} = [b_1, \dots, b_n]$ и $\mathcal{C} = [c_1, \dots, c_m]$ в пространствах V и W соответственно имеет размеры $m \times n$ и строится по столбцам: $A = \left(\overline{\varphi(b_1)} \mid \dots \mid \overline{\varphi(b_n)} \right)$, где $\overline{\varphi(b_j)}$ есть *координатный столбец* вектора $\varphi(b_j) \in W$ относительно базиса \mathcal{C} ; элементы матрицы A могут быть определены формулой $a_{ij} = [\varphi(b_j)]_i$, где в правой части стоит i -я координата вектора $\varphi(b_j)$; $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$.

Сопоставление линейному гомоморфизму $\varphi : V \rightarrow W$ его матрицы A задает *изоморфизм* линейного пространства $\mathcal{L}(V, W)$ на линейное пространство $(m \times n)$ -матриц с элементами из P (в частности, сумме гомоморфизмов отвечает сумма соответствующих матриц, при умножении оператора на скаляр его матрица умножается на такой же скаляр, нулевому оператору o отвечает нулевая матрица O). Более того, при согласованном выборе базисов *композиции* двух линейных отображений отвечает *произведение* соответствующих матриц.

При замене "старых" базисов $\mathcal{B} = [b_1, \dots, b_n]$ и $\mathcal{C} = [c_1, \dots, c_m]$ на "новые" базисы $\mathcal{B}' = [b'_1, \dots, b'_n]$ и $\mathcal{C}' = [c'_1, \dots, c'_m]$, с матрицами перехода T и Q соответственно, матрица A заменяется на *эквивалентную* матрицу $A' = Q^{-1}AT$.

См. [LA], §§ 12–13.

4.4.2а. Эквивалентные матрицы A и B (с элементами из поля P) должны, по определению, иметь одинаковые размеры $m \times n$ и должны быть связаны соотношением $B = SAT$, в котором $(m \times m)$ -матрица S

и $(n \times n)$ -матрица T являются *обратимыми*. Две матрицы одинаковых размеров эквивалентны в том и только том случае, когда от одной из них можно перейти к другой с помощью конечного числа *элементарных преобразований* над строками и столбцами, или, что равносильно, когда матрицы имеют одинаковые *ранги*.

См. [LA], §§ 12–13; [A], §§ 5, 12, 14.

4.4.3. Арифметизация линейного отображения (гомоморфизма) $\varphi : V \rightarrow W$ из одного *конечномерного* линейного пространства (над полем P) в другое (над тем же полем) осуществляется после арифметизации самих пространств V и W путем выбора в них некоторых базисов, $\mathcal{B} = [b_1, \dots, b_n]$ и $\mathcal{C} = [c_1, \dots, c_m]$, $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$, с последующим отождествлением $V \equiv P^n$, $W \equiv P^m$ (или, подробнее: $x \equiv \bar{x}$, $y \equiv \bar{y}$, где $x \in V$, $y \in W$, а $\bar{x} \in P^n$, $\bar{y} \in P^m$ — соответствующие координатные столбцы). Арифметизацией для φ служит линейное отображение $\Phi : P^n \rightarrow P^m$, действующее по правилу: $\bar{y} = A \cdot \bar{x}$, где A — *матрица линейного отображения φ* относительно базисов \mathcal{B} и \mathcal{C} . Можно считать, что $(m \times n)$ -матрица A отвечает как φ (относительно \mathcal{B} и \mathcal{C}), так и Φ (относительно *естественных базисов \mathcal{E}_n и \mathcal{E}_m*).

См. [LA], §§ 12–13.

4.4.4. Линейный мономорфизм — это *инъективный* линейный гомоморфизм; критерием инъективности гомоморфизма $\varphi : V \rightarrow W$ служит тривиальность его *ядра*: $\text{Ker}(\varphi) = O$; всякий линейный мономорфизм является *линейным изоморфизмом на свой образ*: $\varphi : V \xrightarrow{\cong} \text{Im}(\varphi)$; если пространство V конечномерно, то критерием мономорфности φ служит тот факт, что φ переводит некоторый базис \mathcal{B} пространства V в *линейно независимую* систему векторов $\varphi(\mathcal{B})$ в пространстве W ; если оба пространства, V и W , конечномерны и в некоторых базисах \mathcal{B} и \mathcal{C} этих пространств линейному отображению φ отвечает $(m \times n)$ -матрица A , то мономорфность оператора φ равносильна равенству $\text{rank}(A) = n$.

См. [LA], §§ 1, 6, 15.

4.4.5. Линейный эпиморфизм — это *сюръективный* линейный гомоморфизм; факт сюръективности гомоморфизма $\varphi : V \rightarrow W$ может быть выражен с помощью равенства $\text{Im}(\varphi) = W$ для *образа* этого отображения; для конечномерных пространств V и W критерием эпиморфности φ служит то обстоятельство, что φ переводит некоторый базис \mathcal{B} пространства V в *порождающую W* систему векторов $\varphi(\mathcal{B})$; если в некоторых базисах \mathcal{B} и \mathcal{C} пространств V и W линейному отображению φ отвечает $(m \times n)$ -матрица A , то эпиморфность φ равносильна равенству

$\text{rank}(A) = m$.

См. [LA], §§ 1, 6, 15.

4.4.6. Линейный изоморфизм — это *биективный* линейный гомоморфизм (*мономорфизм* и *эпиморфизм* одновременно). Биективность линейного отображения равносильна его обратимости. Используется обозначение $V \cong W$ для выражения факта существования изоморфизма $\varphi : V \xrightarrow{\cong} W$; между двумя линейными пространствами. Если пространства V и W *конечномерны*, то линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда переводит некоторый базис \mathcal{B} пространства V в базис $\varphi(\mathcal{B})$ пространства W . Два конечномерных линейных пространства изоморфны в том и только том случае, когда их размерности одинаковы: $\dim(V) = \dim(W)$. На языке матриц: если линейному отображению φ отвечает (в некоторых базисах) матрица A , то это отображение является обратимым тогда и только тогда, когда матрица A является квадратной и обратимой.

См. [LA], §§ 1, 6, 15.

4.4.7. Ядро (нуль-пространство) линейного отображения (гомоморфизма) $\varphi : V \rightarrow W$ определяется как линейное подпространство пространства V , состоящее из векторов, переходящих под действием φ в нулевой вектор: $\text{Ker}(\varphi) = \{x \in V : \varphi(x) = 0\}$.

Тривиальность ядра ($\text{Ker}(\varphi) = O$) служит критерием *мономорфности* линейного отображения φ . В случае конечномерных пространств V и W ($\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$) может быть (с помощью выбора базисов \mathcal{B} и \mathcal{C} в V и W соответственно) произведена *арифметизация* данных пространств и отображения φ , т. е. отождествление $\varphi \equiv \Phi$, где $\Phi : P^n \rightarrow P^m$ — линейное отображение арифметических линейных пространств, заданное формулой $\Phi(\bar{x}) = A \cdot \bar{x}$, где $\bar{x} \in P^n$, A — $(m \times n)$ -матрица, отвечающая φ в базисах \mathcal{B} и \mathcal{C} ; при этом ядро $\text{Ker}(\varphi)$ отождествляется с ядром $\text{Ker}(\Phi) = L_A^0 = \{\bar{x} \in P^n : A \cdot \bar{x} = \bar{0}\}$, т. е. с *нуль-пространством* матрицы A . Таким образом, ядро линейного отображения оказывается линейным подпространством в пространстве V , заданным *первым способом*.

См. [LA], §§ 14–15.

4.4.8. Дефект линейного отображения $\varphi : V \rightarrow W$ конечномерных линейных пространств определяется как *размерность ядра* этого отображения; обозначение: $\text{dfc}(\varphi) = \dim(\text{Ker}(\varphi))$; если в некоторых базисах \mathcal{B} и \mathcal{C} пространств V и W линейному отображению φ отвечает $(m \times n)$ -матрица A ($\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$), то дефект φ

вычисляется по формуле $\text{dfc}(\varphi) = n - r$, где $r = \text{rank}(A)$; величина $\text{dfc}(A) = n - \text{rank}(A)$ называется *дефектом матрицы* A . Дефект линейного отображения связан с его *рангом* формулой: $\text{dfc}(\varphi) + \text{rank}(\varphi) = n$. Равенство нулю дефекта служит критерием мономорфности линейного отображения.

См. [LA], § 14.

4.4.9. Образ линейного отображения $\varphi : V \rightarrow W$ является линейным подпространством $\text{Im}(\varphi) = \varphi(V) = \{\varphi(x) : x \in V\}$ в пространстве W ; по определению, отображение φ является *эпиморфным*, если $\text{Im}(\varphi) = W$. В случае конечномерных пространств V и W ($\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$) может быть (с помощью выбора базисов \mathcal{B} и \mathcal{C} в V и W соответственно) произведена *арифметизация* данных пространств и отображения φ , т. е. отождествление $\varphi \equiv \Phi$, где $\Phi : P^n \rightarrow P^m$, — линейное отображение арифметических линейных пространств, заданное формулой $\Phi(\bar{x}) = A \cdot \bar{x}$, где $\bar{x} \in P^n$, A — $(m \times n)$ -матрица, отвечающая φ в базисах \mathcal{B} и \mathcal{C} ; при этом образ $\text{Im}(\varphi)$ отождествляется с образом $\text{Im}(\Phi) = R_A = \langle \bar{a}_1 | \dots | \bar{a}_n \rangle$, т. е. с *образом* (линейной оболочкой столбцов) матрицы A . По построению, образ линейного отображения оказывается линейным подпространством в пространстве W , заданным *вторым способом*.

См. [LA], §§ 14–15.

4.4.10. Ранг линейного отображения $\varphi : V \rightarrow W$ конечномерных линейных пространств определяется как *размерность образа* этого отображения; обозначение: $\text{rank}(\varphi) = \dim(\text{Im}(\varphi))$; он совпадает с *рангом матрицы*, отвечающей φ в некоторых базисах данных пространств.

См. [LA], § 14.

4.4.11. Сужение линейного отображения $\varphi : V \rightarrow W$ на линейное подпространство $U \leq V$, независимое с его ядром $N = \text{Ker}(\varphi)$, является *мономорфизмом* $\varphi|_U : U \rightarrow W$; можно сказать также, что $\varphi|_U$ является *изоморфизмом на свой образ*: $\varphi|_U : U \xrightarrow{\cong} \varphi(U)$.

См. [LA], § 15.

§ 4.5. Линейные операторы (эндоморфизмы)

4.5.1. Линейный эндоморфизм (синоним: **линейный оператор, действующий в одном пространстве**) — это линейное отображе-

ние (гомоморфизм) $\varphi : V \rightarrow V$ из линейного пространства V в само это пространство. Множество $\mathcal{L}(V)$ всех линейных эндоморфизмов, действующих в V , является алгеброй над полем P относительно алгебраических действий сложения, композиции и умножения на скаляр; роль нуля играет нулевой эндоморфизм o ($o(x) = 0, x \in V$), роль единицы — тождественный эндоморфизм ε ($\varepsilon(x) = x, x \in V$); для любого скаляра $\lambda \in P$ определен скалярный эндоморфизм $\lambda\varepsilon$; в случае конечномерного пространства V ($\dim(V) = n$) алгебра $\mathcal{L}(V)$ также конечномерна: $\dim(\mathcal{L}(V)) = n^2$.

См. [LA], §§ 12–13.

4.5.2. Матрица линейного эндоморфизма $\varphi : V \rightarrow V$, действующего в n -мерном пространстве V , относительно некоторого базиса $\mathcal{B} = [b_1, \dots, b_n]$, есть квадратная матрица $A = \left(\overline{\varphi(b_1)} \mid \dots \mid \overline{\varphi(b_n)} \right)$, составленная из координатных векторов-столбцов $\overline{\varphi(b_j)} \in P^n$, отвечающих в базисе \mathcal{B} векторам $\varphi(b_j) \in V$ ($j = 1, \dots, n$).

Сопоставление линейному эндоморфизму φ его матрицы A задает изоморфизм алгебры $\mathcal{L}(V)$ на алгебру квадратных матриц порядка n (в частности, композиции операторов отвечает произведение матриц, тождественному оператору соответствует единичная матрица и т. д.).

При замене базиса \mathcal{B} на "новый" базис \mathcal{B}' , с матрицей перехода T , матрица A заменяется на подобную матрицу $A' = T^{-1}AT$.

См. [LA], §§ 12–13.

4.5.2а. Подобные квадратные матрицы A и B (с элементами из поля P) должны, по определению, иметь одинаковый порядок n и должны быть связаны соотношением $B = T^{-1}AT$, в котором обратимая матрица T также имеет порядок n . В случае алгебраической замкнутости поля P справедлив следующий критерий подобия: две квадратные матрицы одного и того же размера подобны тогда и только тогда, когда они приводимы к одной и той же жордановой нормальной форме.

См. [LA], §§ 12–13, 27; [A], §§ 14, 40.

4.5.3. Арифметизация линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi : V \rightarrow V$, действующего в n -мерном пространстве V , с зафиксированным в нем базисом \mathcal{B} , определяется как линейный оператор (эндоморфизм) $\Phi : P^n \rightarrow P^n$, действующий по формуле $\Phi(\bar{x}) = A \cdot \bar{x}$, где $\bar{x} \in P^n$, A — $(n \times n)$ -матрица, отвечающая φ в базисе \mathcal{B} (она же отвечает Φ в естественном базисе \mathcal{E}_n).

См. [LA], §§ 12–13.

4.5.4. Обратимый линейный оператор (синоним: линейный ав-

томорфизм) — обратимое линейное отображение (линейный *изоморфизм*) $\varphi : V \rightarrow V$ линейного пространства V на себя. В случае конечномерного пространства V , $\dim(V) = n$, обратимость (изоморфность) φ равносильна *мономорфности* и равносильна *эпиморфности* этого оператора.

В других терминах, с использованием понятий *ядра* и *образа*, *дефекта* и *ранга*, а также *определителя*, обратимость линейного оператора оказывается равносильной любому из следующих условий: (1) $\text{Ker}(\varphi) = O$; (2) $\text{Im}(\varphi) = V$; (3) $\text{dfc}(\varphi) = 0$; (4) $\text{rank}(\varphi) = n$; (5) $\det(\varphi) \neq 0$. Каждое из условий (1) — (5) может быть выражено в терминах *матрицы* A , отвечающей φ в произвольном базисе \mathcal{B} : (1) $L_A^0 = O$; (2) $R_A = P^n$; (3) $\text{dfc}(A) = 0$; (4) $\text{rank}(A) = n$; (5) $\det(A) \neq 0$.

См. [LA], § 13.

4.5.5. Необратимый линейный эндоморфизм — линейное отображение $\varphi : V \rightarrow V$, не являющееся *изоморфизмом*. В конечномерном случае это равносильно любому из следующих условий: (1) *ядро* $\text{Ker}(\varphi) \neq O$ (нетривиально); (2) *образ* $\text{Im}(\varphi) \neq V$; (3) *дефект* $\text{dfc}(\varphi) > 0$; (4) *ранг* $\text{rank}(\varphi) < n = \dim(V)$; (5) *определитель* $\det(\varphi) = 0$. Каждое из условий (1) — (5) может быть выражено в терминах $(n \times n)$ -матрицы A , отвечающей φ в произвольном базисе \mathcal{B} пространства V : (1) $L_A^0 \neq O$; (2) $R_A \neq P^n$; (3) $\text{dfc}(A) > 0$; (4) $\text{rank}(A) < n$; (5) $\det(A) = 0$.

См. [LA], § 13.

4.5.6. Ядро (нуль-пространство) линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi : V \rightarrow V$ определяется так же, как в общем случае линейного отображения. Специфическим для случая эндоморфизмов является то обстоятельство, что ядро $N = \text{Ker}(\varphi)$ оказывается φ -*инвариантным* подпространством, причем сужение $\varphi' = \varphi|_N$ оператора на его ядро является нулевым оператором ($\varphi' = o$) пространства N . Тривиальность ядра линейного эндоморфизма φ служит критерием обратимости φ .

См. [LA], §§ 14, 23.

4.5.7. Дефект линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi : V \rightarrow V$, действующего в конечномерном линейном пространстве V , — это неотрицательное целое число $d = \text{dfc}(\varphi) = \dim(\text{Ker}(\varphi))$; после арифметизации задачи получается формула $d = n - r$, где $n = \dim(V)$, $r = \text{rank}(A)$, A — $(n \times n)$ -матрица, отвечающая φ в некотором базисе пространства V ; дефект линейного эндоморфизма называют также *корангом* φ ; обращение в нуль дефекта служит критерием того, что линейный эндоморфизм *обратим* (является линейным *автоморфизмом*).

См. [LA], §§ 14, 23.

4.5.8. Образ линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi : V \rightarrow V$ определяется так же, как в общем случае линейного отображения. Специфическим для случая эндоморфизмов является то обстоятельство, что как образ $M = \text{Im}(\varphi)$, так и *ядро* $N = \text{Ker}(\varphi)$ являются линейными подпространствами в одном и том же пространстве V , причем оба эти подпространства φ -инвариантны. Равенство $M = V$ служит критерием обратимости φ .

См. [LA], §§ 14, 23.

4.5.9. Ранг линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi : V \rightarrow V$, действующего в конечномерном линейном пространстве V , — это неотрицательное целое число $r = \text{rank}(\varphi) = \dim(\text{Im}(\varphi))$; он совпадает с *рангом матрицы*, отвечающей φ в некотором базисе пространства V . Равенство $r = n = \dim(V)$ служит критерием того, что линейный эндоморфизм *обратим* (является линейным *автоморфизмом*).

См. [LA], §§ 14, 23.

4.5.10. Определитель линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi : V \rightarrow V$, действующего в n -мерном линейном пространстве V , определяется как определитель $(n \times n)$ -матрицы A , соответствующей оператору φ в некотором базисе \mathcal{B} : $\det(\varphi) = \det(A)$; при замене базиса матрица линейного оператора меняется на *подобную* матрицу, и, следовательно, определитель остается неизменным; линейный оператор *обратим* тогда и только тогда, когда $\det(\varphi) \neq 0$.

См. [LA], § 13.

4.5.11. Инвариантное линейное подпространство относительно линейного эндоморфизма $\varphi : V \rightarrow V$ (или: φ -инвариантное подпространство), — это такое подпространство $W \leq V$, которое под действием φ переходит само в себя: $\varphi(W) \leq W$. К числу инвариантных подпространств относятся *тривиальное* $W = O$ и *наибольшее* $W = V$; интерес представляют нетривиальные инвариантные подпространства, отличные от V .

См. [LA], § 19.

4.5.12. Сужение линейного эндоморфизма на инвариантное линейное подпространство определяется следующим образом: если φ является линейным эндоморфизмом, действующим в линейном пространстве V (т. е. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$) и линейное подпространство $W \leq V$ является φ -инвариантным, то сужение $\varphi' = \varphi|_W$ оказывается линейным эндоморфизмом, действующим в W (т. е. $\varphi' \in \mathcal{L}(W)$); на векторы из W

оператор φ' действует так же, как оператор φ : $\varphi'(x) = \varphi(x)$ при $x \in W$.
См. [LA], § 19.

4.5.13. Матрица линейного эндоморфизма $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, имеющего нетривиальное инвариантное подпространство $W_1 \leq V$, отличное от V ($\dim(V) = n$), при специальном выборе базиса $\mathcal{B} = [\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2]$ (где \mathcal{B}_1 — базис в подпространстве W_1 , \mathcal{B}_2 — базис в некотором прямом дополнении W_2 к подпространству W_1) является верхней блочно-треугольной следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}. \quad (*)$$

В матрице (*) северо-западный квадратный блок $A_{11} = A'_1$ порядка $n_1 = \dim(W_1)$ отвечает сужению $\varphi'_1 = \varphi|_{W_1}$ данного линейного эндоморфизма φ на φ -инвариантное линейное подпространство W_1 ; юго-восточный квадратный блок A_{22} имеет порядок $n_2 = n - n_1$. Может случиться, что существует прямое дополнение W_2 к линейному подпространству W_1 , также являющееся φ -инвариантным. Тогда блочно-треугольный вид (*) превращается в блочно-диагональный: $A = \text{diag}(A_{11}, A_{22})$, где юго-восточный блок $A_{22} = A'_2$ отвечает сужению $\varphi'_2 = \varphi|_{W_2}$.

См. [LA], § 20.

4.5.14. Блочное строение матрицы линейного эндоморфизма, действующего в полной прямой сумме линейных подпространств $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$ (где $\dim(W) = n$; $\dim(W_i) = n_i$; $i = 1, \dots, s$), определяется с помощью операторов вложения и проектирования следующим образом: для любых $i, j = 1, \dots, s$ рассматривается линейный гомоморфизм $\varphi_{ij} = \pi_i \circ \varphi \circ \alpha_j : W_j \rightarrow W_i$, где композиция $\varphi \circ \alpha_j : W_j \rightarrow W$ первого и второго (считая справа) отображений есть не что иное, как сужение $\varphi|_{W_j}$ оператора φ на подпространство W_j , после чего третье отображение, π_i , осуществляет проектирование предыдущего результата на подпространство W_i ; при $i = j$ получаются линейные эндоморфизмы $\varphi_{ii} : W_i \rightarrow W_i$.

Если в пространстве V выбран базис $\mathcal{B} = [\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_s]$, приспособленный к прямой сумме (\mathcal{B}_i — базис в W_i), то $(n \times n)$ -матрица A , отвечающая φ в базисе \mathcal{B} , будет иметь следующее блочное строение: $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$, где каждый блок A_{ij} имеет размеры $n_i \times n_j$ и отвечает оператору (гомоморфизму) φ_{ij} ; диагональные блоки A_{ii} являются квадратными $(n_i \times n_i)$ -матрицами и отвечают эндоморфизмам φ_{ii} .

Если две блочные матрицы имеют одинаковые размеры и одинаковое блочное строение, то алгебраические действия над ними (сложение и умножение) можно выполнять поблочно.

Если все подпространства-слагаемые W_i являются φ -инвариантными, то линейные эндоморфизмы φ_{ii} совпадают с сужениями: $\varphi_{ii} = \varphi'_i = \varphi|_{W_i}$, а при $i \neq j$ гомоморфизмы φ_{ij} являются нулевыми, так что блочная матрица A оказывается блочно-диагональной: $A = \text{diag}(A'_1, \dots, A'_s)$, где A'_i отвечает φ'_i в базисе \mathcal{B}_i .

См. [LA], § 20.

4.5.15. Нильпотентный линейный эндоморфизм определяется как такой эндоморфизм $\varphi : V \rightarrow V$, для которого существует натуральное число k такое, что степень $\varphi^k = o$ (является нулевым оператором). Для нильпотентного эндоморфизма φ существует наименьший показатель $l = \min\{k \in \mathbb{N} : \varphi^k = o\}$; он называется **показателем нильпотентности** для φ и характеризуется условиями: $\varphi^{l-1} \neq o$; $\varphi^l = o$.

Нулевой эндоморфизм является единственным нильпотентным линейным эндоморфизмом с показателем нильпотентности $l = 1$. Нильпотентный эндоморфизм обязательно *необратим*. Если пространство V конечномерно ($\dim(V) = n$), то показатель нильпотентности не превышает размерности ($l \leq n$) и совпадает с *показателем стабилизации* для φ , причем в этом (и только этом) случае: (1) *стабильное ядро* совпадает со всем пространством: $N^{(l)} = V$; (2) *стабильный дефект* максимален: $d^{(l)} = n$; (3) *стабильный образ* тривиален: $M^{(l)} = \{0\}$; (4) *стабильный ранг* является нулевым: $r^{(l)} = 0$.

Свойство нильпотентности для линейного эндоморфизма может быть выражено в терминах его *матрицы* (относительно некоторого базиса \mathcal{B} пространства V): оператор φ нильпотентен тогда и только тогда, когда нильпотентна его матрица A ; показатели нильпотентности для φ и для A совпадают.

Нильпотентный линейный эндоморфизм в n -мерном линейном пространстве характеризуется также тем, что его *характеристический многочлен* выражается формулой $h_\varphi(\lambda) = \lambda^n$. *Спектр* нильпотентного эндоморфизма состоит из одного нуля. Ненулевой нильпотентный линейный эндоморфизм не является *диагонализируемым*. Для нильпотентного эндоморфизма φ всегда (над любым полем) существует *жорданов базис*, в котором φ отвечает блочно-диагональная матрица с *нильпотентными жордановыми ящичками* в качестве диагональных блоков.

См. [LA], §§ 21, 23, 25.

4.5.15а. Нильпотентная квадратная матрица характеризуется условием обращения в нуль некоторой положительной степени этой матрицы. Натуральное число l такое, что $A^{l-1} \neq O$; $A^l = O$, называется **показателем нильпотентности** для квадратной матрицы A . Показатель

нильпотентности l не может превышать порядка n матрицы A и равен единице лишь для нулевой матрицы. Примером нильпотентной матрицы является *нильпотентный жорданов ящик* $A = \boxed{J_n(0)}$, для которого показатель нильпотентности равен n . Всякая нильпотентная матрица *подобна* блочно диагональной матрице J с нильпотентными жордановыми ящиками в качестве диагональных блоков (матрица J является *жордановой нормальной формой* для A ; количество и размеры ящиков определяются с помощью *столбчатой диаграммы*, соответствующей линейному эндоморфизму, заданному матрицей A).

См. [LA], §§ 21, 23, 25.

4.5.16. Значение многочлена на линейном эндоморфизме (на квадратной матрице) определяется следующим образом: если $f(\lambda) = a_0\lambda^r + a_1\lambda^{r-1} + \dots + a_{r-1}\lambda + a_r$ — многочлен степени r с коэффициентами из поля P , φ — линейный эндоморфизм, действующий в линейном пространстве V (над полем P), A — квадратная матрица с элементами из P , то линейный эндоморфизм $f(\varphi) \in \mathcal{L}(V)$ и квадратная матрица $f(A)$ определяются формулами: $f(\varphi) = a_0\varphi^r + a_1\varphi^{r-1} + \dots + a_{r-1}\varphi + a_r\varepsilon$; $f(A) = a_0A^r + a_1A^{r-1} + \dots + a_{r-1}A + a_rE$, где ε — тождественный эндоморфизм пространства V , E — единичная матрица такого же размера, что и A .

Если пространство V конечномерно, $\dim(V) = n$, и в некотором базисе \mathcal{B} пространства V оператору φ отвечает $(n \times n)$ -матрица A , то, в том же базисе, оператору $f(\varphi)$ отвечает матрица $f(A)$.

См. [LA], § 29; [A], § 36.

4.5.17. Аннулирующий многочлен для линейного эндоморфизма (для квадратной матрицы) — это такой многочлен $f(\lambda)$ (с коэффициентами из основного поля), что для линейного эндоморфизма $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ [для квадратной матрицы A] значение $f(\varphi) = o$ (является нулевым эндоморфизмом) [соответственно: $f(A) = O$ (является нулевой матрицей)].

Согласно *теореме Гамильтона – Кэли*, всякий линейный эндоморфизм φ , действующий в n -мерном линейном пространстве V [соответственно: всякая $(n \times n)$ -матрица A], имеет аннулирующий многочлен степени n , а именно — *характеристический многочлен* $h_\varphi(\lambda) = \det(\varphi - \lambda\varepsilon)$ [соответственно: $h_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$].

Среди аннулирующих многочленов всегда существует (и определен однозначно, с точностью до скалярного множителя) аннулирующий многочлен наименьшей степени; он называется *минимальным аннулирующим многочленом*; всякий аннулирующий многочлен делится на мини-

мальный аннулирующий.

См. [LA], § 29.

§ 4.6. Спектральная теория линейных эндоморфизмов

4.6.1. Собственное значение для линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi : V \rightarrow V$, действующего в линейном пространстве V (над полем P), — это такой *скаляр* $\lambda_0 \in P$, для которого существует *ненулевой* вектор $x \in V$, удовлетворяющий условию $\varphi(x) = \lambda_0 x$; при этом говорят, что вектор x является *собственным вектором* для φ , *отвечающим* (соответствующим) собственному значению λ_0 .

Скаляр $\lambda_0 \in P$ является собственным значением для $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ тогда и только тогда, когда является *нетривиальным* ядро $S_{\lambda_0}(\varphi) = \text{Ker}(\psi_0)$ *смещенного* линейного эндоморфизма $\psi_0 = \varphi - \lambda_0 \varepsilon$ (где ε — тождественный оператор в пространстве V); говорят, что линейное подпространство $S_{\lambda_0}(\varphi) \leq V$ является *собственным подпространством* для линейного эндоморфизма φ , *отвечающим* собственному значению λ_0 .

Если линейное пространство V конечномерно, то условие нетривиальности ядра ($\text{Ker}(\psi_0) \neq O$) равносильно условию *необратимости* эндоморфизма ψ_0 . Последнее, в свою очередь, равносильно обращению в нуль определителя $\det(\varphi - \lambda_0 \varepsilon) = 0$, что можно далее трактовать следующим образом: скаляр λ_0 является корнем *характеристического многочлена* $h_\varphi(\lambda) = \det(\varphi - \lambda \varepsilon)$, или, как еще говорят, — *характеристическим корнем*. В частности, *нуль* присутствует среди собственных значений линейного эндоморфизма φ тогда и только тогда, когда φ необратим.

См. [LA], §§ 16–17; [A], § 39.

4.6.2. Спектр $\sigma(\varphi)$ линейного эндоморфизма $\varphi : V \rightarrow V$ (над полем P) определяется как *множество* всех его *собственных значений*. В случае, когда V конечномерно, $\dim(V) = n$, спектр оператора φ является *конечным* подмножеством поля P : $\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} \subseteq P$, *мощность* (число элементов) которого не превышает размерности: $s \leq n$. Не исключается случай *пустого* спектра: над *алгебраически замкнутым* полем спектр любого линейного эндоморфизма *непуст*.

См. [LA], §§ 16–17; [A], § 40.

4.6.3. Арифметизация спектра линейного эндоморфизма φ , действующего в n -мерном линейном пространстве V (над полем P) осуществляется после выбора некоторого базиса \mathcal{B} в пространстве V , с по-

следующими отождествлениями: $V \equiv P^n$ — n -мерное арифметическое линейное пространство; $\mathcal{B} \equiv \mathcal{E}_n$ — естественный базис в P^n ; $\varphi \equiv \Phi$ — арифметизация линейного оператора φ , т. е. линейный оператор Φ в пространстве P^n , действующий по формуле $\Phi(\bar{x}) = A \cdot \bar{x}$; $\bar{x} \in P^n$, где A — $(n \times n)$ -матрица, отвечающая φ в базисе \mathcal{B} . Спектр $\sigma(\varphi)$ совпадает со спектром $\sigma(\Phi)$ оператора Φ и, далее, — со спектром $\sigma(A)$ квадратной матрицы A , т. е. с множеством всех *характеристических корней* для матрицы A .

Таким образом, для вычисления $\sigma(\varphi)$ необходимо найти все корни (в поле P) *характеристического многочлена* $h_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$.

См. [LA], § 18.

4.6.4. Характеристическая матрица для квадратной матрицы A размера $n \times n$ определяется как зависящая от параметра $\lambda \in P$ матрица $C_A(\lambda) = \lambda T - A$. При замене данной матрицы A на *подобную* матрицу $A' = T^{-1}AT$ характеристическая матрица также заменяется на подобную: $C_{A'}(\lambda) = T^{-1}C_A(\lambda)T$. Определитель характеристической матрицы является многочленом степени n (по переменной λ), называемым *характеристическим многочленом*; используется обозначение: $h_A(\lambda) = \det(C_A(\lambda))$.

См. [LA], § 18.

4.6.5. Характеристический многочлен для квадратной матрицы A размера $n \times n$ определяется как *определитель характеристической матрицы*: $h_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$.

Правая часть последней формулы действительно является многочленом степени n : $h_A(\lambda) = c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1}\lambda + c_n$, причем — *нормализованным* многочленом: старший коэффициент $c_0 = 1$; коэффициент c_1 совпадает со *следом* матрицы A : $c_1 = \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$; свободный член c_n может быть представлен формулой: $c_n = (-1)^n \det(A)$.

При замене данной матрицы A на *подобную* $A' = T^{-1}AT$ характеристическая матрица также заменяется на подобную; следовательно, характеристический многочлен сохраняется: $h_{A'}(\lambda) = h_A(\lambda)$.

Корни характеристического многочлена называются *характеристическими корнями* для матрицы A ; они составляют *спектр* $\sigma(A)$ этой матрицы (содержащий не более n элементов).

См. [LA], § 18; [A], §§ 36, 39.

4.6.6. Спектр $\sigma(A)$ квадратной матрицы A определяется как совокупность всех ее *характеристических корней*. Если $(n \times n)$ -матрица A отвечает (в некотором базисе) некоторому линейному эндоморфизму φ ,

действующему в n -мерном пространстве V , то спектры для φ и для A совпадают: $\sigma(\varphi) = \sigma(A)$.

См. [LA], § 18.

4.6.7. Характеристический многочлен для линейного оператора (эндоморфизма) φ , действующего в n -мерном линейном пространстве V (над полем P), по определению, совпадает с характеристическим многочленом для квадратной матрицы A , отвечающей φ в некотором базисе \mathcal{B} пространства V : $h_\varphi(\lambda) = h_A(\lambda)$.

Это определение *корректно*, поскольку при замене базиса матрица линейного оператора заменяется на подобную, а ее характеристический многочлен не изменяется.

См. [LA], § 18.

4.6.8. Характеристическое уравнение для линейного оператора φ (для квадратной матрицы A), по определению, имеет вид $h_\varphi(\lambda) = 0$ (или, что то же: $h_A(\lambda) = 0$), где в левой части стоит *характеристический многочлен* для оператора φ (для матрицы A).

См. [LA], § 18.

4.6.9. Характеристические корни для линейного оператора φ (для квадратной матрицы A) — это, по определению, корни *характеристического уравнения*, или, что то же, — корни характеристического многочлена $h_\varphi(\lambda)$ (совпадающего с $h_A(\lambda)$, если матрица A соответствует оператору φ в некотором базисе). Характеристические корни совпадают с *собственными значениями* для φ и, таким образом, имеет место равенство спектров: $\sigma(\varphi) = \sigma(A)$.

См. [LA], § 18.

4.6.10. Алгебраическая кратность собственного значения λ_0 для линейного эндоморфизма φ , действующего в конечномерном линейном пространстве V (над полем P) — это кратность λ_0 как корня характеристического многочлена $h_\varphi(\lambda)$, т. е. такое натуральное число m_0 , что $h_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{m_0} g(\lambda)$, где $g(\lambda)$ — многочлен (с коэффициентами в P), для которого λ_0 не является корнем.

См. [LA], § 18; [A], § 40.

4.6.11. Сумма алгебраических кратностей собственных значений для линейного эндоморфизма φ , действующего в n -мерном линейном пространстве V (над полем P), есть неотрицательное целое число $m' = m_1 + \dots + m_s$, где m_i — алгебраическая кратность $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$ ($i = 1, \dots, s$); число m' заключено в пределах от нуля до размерности n ; нулевое значение реализуется в случае пустого спектра; максимальное

значение n достигается, если характеристический многочлен разложим (над полем P) на линейные множители (такая ситуация имеет место для любого линейного эндоморфизма, если поле алгебраически замкнуто).

См. [LA], § 18; [A], § 40.

4.6.12. Разложение на множители характеристического многочлена для линейного эндоморфизма $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, $\dim(V) = n$ (над полем P) имеет следующий вид: $h_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s} g(\lambda)$, где $\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$, m_i — алгебраическая кратность собственного значения λ_i , $g(\lambda)$ — (нормализованный) многочлен над полем P , имеющий степень $n - m'$ (m' — сумма алгебраических кратностей всех собственных значений) и не имеющий корней в P . Если поле P алгебраически замкнуто, то (для любого оператора φ) $m' = \deg(h_\varphi(\lambda)) = n$ и многочлен $g(\lambda) = 1$.

См. [LA], § 18; [A], § 40.

4.6.13. Линейный эндоморфизм с простым спектром — это эндоморфизм $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, действующий в n -мерном линейном пространстве V и имеющий в точности n попарно различных собственных значений: $\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$; $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. В этом случае для каждого собственного значения λ_i как алгебраическая, так и геометрическая кратности равны единице: $n_i = m_i = 1$; характеристический многочлен разлагается на линейные множители, ни один из которых не является кратным: $h_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$. Линейный оператор с простым спектром является диагонализируемым.

См. [LA], § 21.

4.6.14. Делимость характеристических многочленов для линейного эндоморфизма $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ и для сужения этого эндоморфизма на некоторое (нетривиальное) φ -инвариантное линейное подпространство $W' \leq W$ ($\varphi(W') \leq W'$) представляется в обозначениях записью $h_{\varphi'}(\lambda) | h_\varphi(\lambda)$, выражающей факт существования такого многочлена $g(\lambda)$, что справедливо равенство $h_\varphi(\lambda) = h_{\varphi'}(\lambda)g(\lambda)$. Возможен случай, когда пространство V разбивается в прямую сумму двух φ -инвариантных линейных подпространств: $V = W' \oplus W''$; тогда в качестве многочлена $g(\lambda)$ будет фигурировать характеристический многочлен для сужения данного эндоморфизма на второе прямое слагаемое: $h_\varphi(\lambda) = h_{\varphi'}(\lambda)h_{\varphi''}(\lambda)$, где $\varphi' = \varphi|_{W'}$; $\varphi'' = \varphi|_{W''}$.

Последний результат остается справедливым для суммы нескольких инвариантных подпространств.

См. [LA], § 22; [A], § 37.

4.6.15. Собственный вектор для линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi : V \rightarrow V$, действующего в линейном пространстве V (над полем P), определяется как *ненулевой* вектор $x \in V$, $x \neq 0$, переходящий под действием φ в *пропорциональный* вектор: $\varphi(x) = \lambda_0 x$; при этом коэффициент пропорциональности $\lambda_0 \in P$ называется *собственным значением* для φ и говорят, что собственный вектор x *отвечает* (соответствует) собственному значению λ_0 . Все собственные векторы, отвечающие фиксированному собственному значению λ_0 , если к ним присоединить (не считающийся собственным) *нулевой* вектор, образуют собственное подпространство $S_{\lambda_0}(\varphi) = \text{Ker}(\varphi - \lambda_0 \varepsilon)$, являющееся ядром *смещенного* линейного эндоморфизма $\psi_0 = \varphi - \lambda_0 \varepsilon$.

Линейный оператор может не иметь собственных векторов (так бывает, если его *спектр* пуст); над *алгебраически замкнутым* полем всякий линейный эндоморфизм имеет собственные векторы.

Любая система $\mathcal{A} = [a_1, \dots, a_k]$, составленная из собственных векторов, отвечающих *попарно различным* собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, является *линейно независимой*.

См. [LA], §§ 16–19; [A], § 40.

4.6.16. Собственное подпространство для линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi : V \rightarrow V$, *отвечающее* (соответствующее) собственному значению λ_0 , определяется как (по определению собственного значения — нетривиальное) линейное подпространство $S_{\lambda_0}(\varphi) = \text{Ker}(\varphi - \lambda_0 \varepsilon) \leq V$. Подпространство $S_{\lambda_0}(\varphi)$ содержит все *собственные векторы* для φ , отвечающие λ_0 , с добавлением к ним нулевого вектора (который не считается собственным). В случае, когда V конечномерно, $\dim(V) = n$, собственное подпространство $W_0 = S_{\lambda_0}(\varphi)$ также является конечномерным; его размерность $n_0 = \dim(W_0)$ называется *геометрической кратностью* собственного значения λ_0 ; геометрическая кратность не превышает алгебраической кратности: $n_0 \leq m_0$; равенство $n_0 = m_0$ имеет место тогда и только тогда, когда рассматриваемое собственное подпространство W_0 совпадает с *корневым подпространством* $U_0 = Q_{\lambda_0}(\varphi)$.

Всякое собственное подпространство для линейного эндоморфизма φ является φ -инвариантным, причем сужение φ на W_0 является *скалярным* линейным эндоморфизмом: $\varphi|_{W_0} = \lambda_0 \varepsilon_0$, где ε_0 — тождественный оператор пространства W_0 .

Если $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — попарно различные собственные значения для линейного эндоморфизма φ , то соответствующие собственные подпространства $W_i = S_{\lambda_i}(\varphi)$; $i = 1, \dots, k$ *независимы в совокупности* и, следовательно-

но, их сумма является *прямой*.

См. [LA], §§ 16–19.

4.6.17. Геометрическая кратность собственного значения λ_0 для линейного оператора (эндоморфизма) φ , действующего в конечномерном линейном пространстве V , определяется как *размерность* соответствующего *собственного подпространства*: $n_0 = \dim(S_{\lambda_0}(\varphi))$; геометрическая кратность является натуральным числом, не превышающим соответствующей *алгебраической кратности*: $n_0 \leq m_0$. Это неравенство обращается в равенство в случае совпадения собственного подпространства с *корневым*.

См. [LA], §§ 18, 22.

4.6.18. Арифметизация собственных подпространств для линейного эндоморфизма φ , действующего в n -мерном линейном пространстве V (над полем P) производится после фиксации некоторого базиса \mathcal{B} в пространстве V , с последующими отождествлениями: $V \equiv P^n$; $\mathcal{B} \equiv \mathcal{E}_n$; $\varphi \equiv \Phi : P^n \rightarrow P^n$, где Φ действует по формуле $\Phi(\bar{x}) = A \cdot \bar{x}$; $\bar{x} \in P^n$, где A — $(n \times n)$ -матрица, отвечающая φ в базисе \mathcal{B} . Вектор $x \in V$ является собственным вектором для оператора φ , отвечающим собственному значению λ_0 , тогда и только тогда, когда соответствующий *координатный столбец* $\bar{x} \in P^n$ является собственным вектором, отвечающим λ_0 , для оператора Φ .

Собственное подпространство $S_{\lambda_0}(\varphi)$ будет отождествляться с собственным подпространством $S_{\lambda_0}(\Phi)$, допускающим явное описание (*первым способом*) как *нуль-пространство* (ядро) матрицы $B_0 = A - \lambda_0 E$, а именно: $S_{\lambda_0}(\varphi) \equiv L_{B_0}^0 = \{\bar{x} \in P^n : B_0 \cdot \bar{x} = \bar{0}\}$.

Решая однородную систему линейных уравнений $B_0 \cdot \bar{x} = \bar{0}$, можно вычислить фундаментальную матрицу F_0 , содержащую некоторый базис в подпространстве $L_{B_0}^0$, после чего рассматриваемое собственное подпространство окажется заданным "экономно" (*вторым способом*): $S_{\lambda_0}(\varphi) \equiv R_{F_0}$. Векторы-столбцы матрицы F_0 представляют (в арифметизированном виде) отвечающие λ_0 базисные собственные векторы для оператора φ .

Геометрическая кратность n_0 собственного значения λ_0 равна количеству столбцов в матрице F_0 и выражается как *дефект* матрицы B_0 : $n_0 = \dim(S_{\lambda_0}(\varphi)) = \text{dfc}(B_0) = n - \text{rank}(B_0)$.

См. [LA], § 18.

4.6.19. Собственная сумма для линейного оператора (эндоморфизма) φ , действующего в линейном пространстве V ($\dim(V) = n$), определяется как *сумма всех собственных подпространств* для φ ; ис-

пользуется обозначение: $S(\varphi) = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$, где $W_i = S_{\lambda_i}(\varphi)$; $i = 1, \dots, s$; $\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ — спектр оператора φ . В формуле для $S(\varphi)$ учтен тот факт, что собственные подпространства, отвечающие попарно различным собственным значениям, являются независимыми в совокупности и, следовательно, их сумма является *прямой*.

Если $\sigma(\varphi) = \emptyset$, то собственная сумма считается нулевой. В общем случае $S(\varphi)$ есть φ -инвариантное линейное подпространство в V , имеющее размерность n' , равную сумме геометрических кратностей всех собственных значений: $n' = n_1 + \dots + n_s$; $n_i = \dim(W_i)$; $i = 1, \dots, s$. Это подпространство содержит все собственные векторы для φ (но не только их, но также — произвольные линейные комбинации этих векторов).

Базис в прямой сумме $S(\varphi)$ может быть выбран состоящим из собственных для φ векторов, а именно — представлен в виде, *приспособленном* к этой сумме: $\mathcal{F}' = [\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_s]$, где \mathcal{F}_i — произвольный базис в W_i . Такой базис \mathcal{F}' является *диагонализующим* для сужения $\varphi' = \varphi|_{W'}$ оператора φ на $W' = S(\varphi)$. При $n' = n$ имеем $W' = V$; в этом случае линейный эндоморфизм φ является *диагонализуемым* во всем пространстве V .

См. [LA], § 21.

4.6.20. Сумма геометрических кратностей собственных значений для линейного эндоморфизма φ , действующего в n -мерном линейном пространстве V (над полем P), есть неотрицательное целое число $n' = n_1 + \dots + n_s$, где n_i — геометрическая кратность $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$ ($i = 1, \dots, s$); число n' заключено в пределах от s (количества собственных значений) до m' (суммы алгебраических кратностей) и имеет смысл размерности *собственной суммы* $S(\varphi)$ для оператора φ . Равенство $n' = n$ является критерием *диагонализуемости* φ ; это условие можно выразить иначе: (1) $m' = n$ и (2) для любого $i = 1, \dots, s$ совпадают алгебраическая и геометрическая кратности ($n_i = m_i$).

См. [LA], §§ 18, 21, 22.

4.6.21. Диагонализующий базис для линейного эндоморфизма (оператора) φ , действующего в n -мерном линейном пространстве V , — это такой базис $\mathcal{B} = [b_1, \dots, b_n]$ в пространстве V , в котором оператору φ отвечает диагональная матрица $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Скаляры λ_i ($i = 1, \dots, n$), располагающиеся на диагонали A , являются не чем иным, как *собственными значениями* для φ (не обязательно различными), а базисные векторы b_i являются *собственными векторами*, отвечающими λ_i .

См. [LA], § 21.

4.6.22. Диагонализируемый линейный эндоморфизм (оператор) φ , действующий в n -мерном линейном пространстве V — это такой линейный эндоморфизм, для которого существует *диагонализирующий базис* \mathcal{B} в пространстве V . Критерий диагонализируемости линейного оператора может быть выражен любым из следующих равносильных условий: (1) в пространстве V существует базис, составленный из собственных для φ векторов; (2) *собственная сумма* для эндоморфизма φ является *полной* (совпадает со всем пространством): $S(\varphi) = V$; (3) *сумма геометрических кратностей* всех собственных значений равна размерности V : $n' = n$, где $n' = n_1 + \dots + n_s$; n_i — геометрическая кратность λ_i ; $\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ — *спектр* оператора φ .

Для диагонализируемого линейного эндоморфизма имеет место совпадение соответствующих геометрических и алгебраических кратностей: $n_i = m_i$ ($i = 1, \dots, s$); обратно, если *сумма алгебраических кратностей* $m' = n$ и $n_i = m_i$ для любого $i = 1, \dots, s$, то оператор φ диагонализируем.

Линейный эндоморфизм с *простым спектром* является диагонализируемым. Диагонализируемость линейного эндоморфизма равносильна *диагонализируемости квадратной матрицы*, отвечающей ему в некотором базисе.

См. [LA], § 21.

4.6.23. Диагонализируемая квадратная матрица с элементами из поля P — это матрица A (размера, скажем, $n \times n$), которая *подобна* (над полем P) диагональной матрице, т. е. такая матрица, для которой существует обратимая $(n \times n)$ -матрица T (с элементами из P) такая, что $T^{-1}AT$ есть диагональная матрица.

Если матрица A рассматривается как матрица линейного эндоморфизма $\Phi : P^n \rightarrow P^n$; $\Phi(\bar{x}) = A \cdot \bar{x}$, то, в случае ее диагонализируемости, матрица T будет служить *матрицей перехода* от естественного базиса \mathcal{E}_n к диагонализирующему для Φ базису (представленному столбцами T).

Матрица, не являющаяся диагонализируемой над полем P , может оказаться диагонализируемой над некоторым более широким полем P' (за счет расширения *спектра* матрицы). Существуют, однако, такие матрицы, которые остаются недиагонализируемыми над любым расширением поля P ; пример: *жорданов ящик* $A = \boxed{J_n(\lambda_0)}$.

См. [LA], § 21.

4.6.24. Жорданов ящик $\boxed{J_k(\lambda_0)}$ — квадратная матрица размера $k \times k$, у которой главная диагональ заполнена скаляром λ_0 , первая наддиагональ — единицами, а остальные элементы равны нулю.

Если такая матрица соответствует некоторому линейному эндомор-

физму $\varphi : U \rightarrow U$ в некотором базисе $\mathcal{B} = [b_1, \dots, b_k]$ k -мерного пространства U , то оператор φ действует на векторы базиса \mathcal{B} следующим образом: $\varphi(b_1) = \lambda_0 b_1$; $\varphi(b_j) = \lambda_0 b_j + b_{j-1}$ ($j = 2, \dots, k$).

Жорданов ящик можно представить в виде $\boxed{J_k(\lambda_0)} = \lambda_0 E + \boxed{J_k(0)}$, где E — единичная $(k \times k)$ -матрица, а $\boxed{J_k(0)}$ — *нильпотентный жорданов ящик*. При $k \geq 2$ любой жорданов ящик является *недиагонализируемой* матрицей.

См. [LA], §§ 13, 21, 26.

4.6.25. Нильпотентный жорданов ящик $\boxed{J_k(0)}$ — квадратная матрица размера $k \times k$, у которой первая наддиагональ заполнена единицами, а все остальные элементы равны нулю. Матрица $\boxed{J_k(0)}$ нильпотентна с *показателем нильпотентности* k . Если такая матрица соответствует линейному эндоморфизму $\varphi : U \rightarrow U$ в базисе $\mathcal{B} = [b_1, \dots, b_k]$ k -мерного пространства U , то оператор φ действует на базисные векторы по формулам: $\varphi(b_1) = 0$; $\varphi(b_j) = b_{j-1}$ ($j = 2, \dots, k$).

См. [LA], §§ 13, 21, 24.

4.6.26. Жорданов базис для линейного оператора (эндоморфизма) φ , действующего в n -мерном линейном пространстве V (над полем P), — это такой базис \mathcal{G} в пространстве V , в котором оператору φ отвечает $(n \times n)$ -матрица J , имеющая блочно-диагональный вид с *жордановыми ящиками* в качестве диагональных блоков. Диагональные элементы этих ящиков есть не что иное, как *собственные значения* для линейного эндоморфизма φ .

Жорданов базис для φ существует тогда и только тогда, когда *характеристический многочлен* $h_\varphi(\lambda)$ разлагается (над полем P) на *линейные множители*, или, другими словами, если $m' = n$, где m' — *сумма алгебраических кратностей* всех собственных значений для φ . Над *алгебраически замкнутым* полем жорданов базис существует для любого линейного эндоморфизма. *Диагонализирующий базис* является частным случаем жорданова базиса; здесь все ящики имеют размер 1×1 .

См. [LA], §§ 25–28; [A], § 40.

4.6.27. Жорданова нормальная форма для квадратной матрицы A (размера $n \times n$, с элементами из поля P) определяется как такая $(n \times n)$ -матрица J , что (1) A и J *подобны*, т. е. $J = T^{-1}AT$, где T — обратимая $(n \times n)$ -матрица; (2) J имеет блочно-диагональный вид, с *жордановыми ящиками* в качестве диагональных блоков.

Жорданова нормальная форма для матрицы A существует тогда и только тогда, когда *характеристический многочлен* $h_A(\lambda)$ разлагается

(над полем P) на *линейные множители*; в случае *алгебраической замкнутости* поля P всякая квадратная матрица обладает жордановой нормальной формой.

Жорданова нормальная форма матрицы A , если она существует, определена, вообще говоря, неоднозначно. Однозначности можно добиться, если: (1) зафиксировать некоторый порядок *характеристических корней* для матрицы A ; (2) для каждого характеристического корня $\lambda_i \in \sigma(A)$ ($i = 1, \dots, s$) жордановы ящики $J_k(\lambda_i)$, отвечающие данному λ_i , располагать в порядке невозрастания размеров.

При этом наблюдаются два "блочных уровня": (1) $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_s)$, где каждый "крупный" блок J_i , отвечает определенному характеристическому корню λ_i и имеет размер $m_i \times m_i$, где m_i — кратность корня λ_i ; (2) каждый блок J_i , в свою очередь, является блочно-диагональной матрицей, с жордановыми ящиками $J_k(\lambda_i)$ в качестве диагональных блоков; количество и размеры ящиков определяются с помощью *столбчатых диаграмм*.

Справедлив следующий *критерий подобия* для квадратных матриц одинакового размера: матрицы A и B подобны тогда и только тогда, когда они могут быть приведены к одной и той же жордановой нормальной форме.

Если $(n \times n)$ -матрица отвечает (в некотором базисе \mathcal{B}) линейному эндоморфизму $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, действующему в n -мерном пространстве V , и для A существует жорданова нормальная форма, то обратимая матрица T , осуществляющая подобие $J = T^{-1}AT$, может интерпретироваться как *матрица перехода* от исходного базиса \mathcal{B} к *жорданову базису* \mathcal{G} для оператора φ .

См. [LA], §§ 25–28; [A], § 40.

4.6.28. Частично жорданов базис для линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi : V \rightarrow V$ — это базис вида $\mathcal{G} = [\mathcal{G}', \mathcal{G}'']$, где \mathcal{G}' — жорданов базис для *сужения* $\varphi' = \varphi|_{U'}$ линейного эндоморфизма φ на некоторое (нетривиальное) φ -*инвариантное* линейное подпространство $U' \leq V$. В частично жордановом базисе линейному оператору φ отвечает блочно-треугольная матрица вида

$$J = \begin{pmatrix} J' & K \\ O & J'' \end{pmatrix}, \quad (*)$$

где матрица J' имеет жорданову нормальную форму (она отвечает эндоморфизму φ').

Если для φ -инвариантного подпространства U' существует, также φ -

инвариантное, прямое дополнение U'' , то блочно-треугольный вид (*) можно сделать блочно-диагональным: $K = O$; $J = \text{diag}(J', J'')$, где блок J'' отвечает сужению $\varphi'' = \varphi|_{U''}$. (В § 4.8 роль U' будет играть *корневая сумма* $Q(\varphi)$.)

См. [LA], § 28.

4.6.29. Частично жорданова нормальная форма для квадратной матрицы A определяется как блочно-треугольная матрица вида (*) (см. предыдущий пункт), или, что предпочтительнее, — блочно-диагональная матрица вида $J = \text{diag}(J', J'')$, в которой северо-западный блок J' имеет жорданову нормальную форму, а юго-восточный блок J'' не имеет характеристических корней (в рассматриваемом поле P).

См. [LA], § 28.

§ 4.7. Теорема о стабилизации и теорема Фробениуса

4.7.1. Итерации (степени) линейного эндоморфизма φ , действующего в линейном пространстве V , определяются следующим образом: $\varphi^0 = \varepsilon$ — тождественный эндоморфизм пространства V , $\varphi^1 = \varphi$, $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ и, вообще: $\varphi^{k+1} = \varphi \circ \varphi^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$); они все являются линейными эндоморфизмами и обладают следующими свойствами: $\varphi^k \circ \varphi^l = \varphi^{k+l}$; $(\varphi^k)^l = \varphi^{kl}$, для любых целых неотрицательных чисел k, l .

Если эндоморфизм φ является автоморфизмом (т. е. обратим), то и все его степени являются автоморфизмами и можно (с сохранением указанных выше свойств) определить целые отрицательные степени: $\varphi^{-k} = (\varphi^{-1})^k$ ($k = 1, 2, \dots$).

См. [LA], § 23.

4.7.2. Итерированные ядра для линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi : V \rightarrow V$ определяются как ядра для итераций (степеней) этого оператора: $N^{(k)} = \text{Ker}(\varphi^k)$; $k = 0, 1, 2, \dots$. Если пространство V конечномерно ($\dim(V) = n$), то, в силу *теоремы о стабилизации*, итерированные ядра образуют последовательность линейных подпространств в пространстве V , *строго возрастающую* (ядра расширяются) при $0 \leq k \leq l$ и *стабилизирующуюся* при $k \geq l$:

$$O = N^{(0)} < N^{(1)} < N^{(2)} < \dots < N^{(l-1)} < N^{(l)} = N^{(l+1)} = \dots \leq V,$$

где l — *показатель стабилизации* для линейного эндоморфизма φ , являющийся неотрицательным целым числом, не превосходящим размер-

ности n .

Все итерированные ядра $N^{(k)}$ являются φ -инвариантными подпространствами, причем $\varphi(N^{(k)}) \subseteq N^{(k-1)} \subseteq N^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$). Сужение $\varphi|_{N^{(1)}} = o$ (является нулевым оператором); далее же, при $1 \leq k \leq l$, сужения $\varphi|_{N^{(k)}}$ являются *нильпотентными* линейными операторами (показатель нильпотентности для $\varphi|_{N^{(k)}}$ равняется k).

Арифметизация линейного эндоморфизма φ (посредством фиксации базиса \mathcal{B} в пространстве V и сопоставления оператору φ квадратной матрицы A) приводит к арифметизации его итерированных ядер; каждое из них оказывается заданным *первым* способом: $N^{(k)} = L_{A^k}^0$; решая однородную систему линейных уравнений $A^k \cdot \bar{x} = \bar{0}$, можно перейти ко *второму* "экономному" способу задания: $N^{(k)} = R_{F^{(k)}}$, где $F^{(k)}$ — фундаментальная матрица для указанной однородной системы. Размерности итерированных ядер (т. е. *итерированные дефекты*) вычисляются по формулам: $d^{(k)} = \dim(N^{(k)}) = n - \text{rank}(A^k)$.

См. [LA], § 23.

4.7.3. Итерированные дефекты для линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi : V \rightarrow V$ [$\dim(V) = n$] определяются как дефекты для итераций (степеней) этого оператора: $d^{(k)} = \text{dfc}(\varphi^k) = \dim(N^{(k)})$; $k = 0, 1, 2, \dots$. Они образуют последовательность целых неотрицательных чисел, которая *строго возрастает* при $0 \leq k \leq l$ и *стабилизируется* при $k \geq l$:

$$0 = d^{(0)} < d^{(1)} < d^{(2)} < \dots < d^{(l-1)} < d^{(l)} = d^{(l+1)} = \dots \leq n,$$

где l — *показатель стабилизации* для оператора φ ($l \leq n$). Итерированные дефекты связаны с *итерированными рангами*: $d^{(k)} + r^{(k)} = n$. Вычислительная формула для итерированных дефектов: $d^{(k)} = n - \text{rank}(A^k)$, где A — матрица, отвечающая оператору φ в некотором базисе пространства V .

См. [LA], § 23.

4.7.4. Итерированные образы для линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi : V \rightarrow V$ определяются как образы для итераций (степеней) этого оператора: $M^{(k)} = \text{Im}(\varphi^k)$; $k = 0, 1, 2, \dots$. Если пространство V конечномерно ($\dim(V) = n$), то, в силу *теоремы о стабилизации*, итерированные образы образуют последовательность линейных подпространств в пространстве V , *строго убывающую* (образы сужаются) при $0 \leq k \leq l$ и *стабилизирующуюся* при $k \geq l$:

$$V = M^{(0)} > M^{(1)} > M^{(2)} > \dots > M^{(l-1)} > M^{(l)} = M^{(l+1)} = \dots \geq O,$$

где l — *показатель стабилизации* для линейного эндоморфизма φ . Все итерированные образы $M^{(k)}$ являются φ -инвариантными подпространствами, причем $\varphi(M^{(k)}) = M^{(k+1)} \subseteq M^{(k)}$ ($k = 0, 1, \dots$). *Арифметизация* итерированных образов приводит ко *второму* способу их задания: $M^{(k)} = R_{A^k}$, где A — матрица, отвечающая оператору φ в некотором базисе. Размерности итерированных образов (т. е. *итерированные ранги*) вычисляются по формулам: $r^{(k)} = \dim(M^{(k)}) = \text{rank}(A^k)$.

См. [LA], § 23.

4.7.5. Итерированные ранги для линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi : V \rightarrow V$ ($\dim(V) = n$) определяются как ранги для итераций (степеней) этого оператора: $r^{(k)} = \text{rank}(\varphi^k) = \dim(M^{(k)})$; $k = 0, 1, 2, \dots$. Они образуют последовательность целых неотрицательных чисел, которая *строго убывает* при $0 \leq k \leq l$ и *стабилизируется* при $k \geq l$:

$$n = r^{(0)} > r^{(1)} > r^{(2)} > \dots > r^{(l-1)} > r^{(l)} = r^{(l+1)} = \dots \geq 0,$$

где l — *показатель стабилизации* для оператора φ ($l \leq n$). Итерированные ранги связаны с *итерированными дефектами*: $d^{(k)} + r^{(k)} = n$. Вычислительная формула для итерированных рангов: $r^{(k)} = \text{rank}(A^k)$, где A — матрица, отвечающая оператору φ в некотором базисе пространства V .

См. [LA], § 23.

4.7.6. Показатель стабилизации для линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi : V \rightarrow V$ (V конечномерно, $\dim(V) = n$) определяется как неотрицательное целое число, начиная с которого *стабилизируются* последовательности *итерированных ядер* и *дефектов*, образов и рангов ($N^{(k)}, d^{(k)}; M^{(k)}, r^{(k)}; k = 0, 1, 2, \dots$). Согласно *теореме о стабилизации*, указанные последовательности стабилизируются *синхронно*, при одном и том же значении l показателя k ; причем $0 \leq l \leq n$. Значение $l = 0$ реализуется для линейных *автоморфизмов* (т. е. для обратимых линейных эндоморфизмов); для них все итерированные ядра тривиальны, а все итерированные образы совпадают с пространством V . Для *нильпотентных* линейных эндоморфизмов показатели стабилизации совпадают с *показателями nilьпотентности*.

См. [LA], § 23.

4.7.7. Стабильное ядро для линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi : V \rightarrow V$ определяется как итерированное ядро $N^{(l)}$, с которого начинается стабилизация итерированных ядер; номером l стабильного ядра служит *показатель стабилизации* для φ . (Иначе стабильное

ядро можно описать как *объединение* всех итерированных.) Стабильное ядро, как и все итерированные, является φ -инвариантным линейным подпространством пространства V ; сужение $\varphi' = \varphi|_{N^{(l)}}$ линейного эндоморфизма φ на стабильное ядро является *нильпотентным* линейным эндоморфизмом, действующим в $N^{(l)}$, причем показатель nilьпотентности для φ' равен как раз l . Стабильное ядро $N^{(l)}$ совпадает со всем пространством V тогда и только тогда, когда nilьпотентным является исходный оператор φ .

См. [LA], §§ 23, 25.

4.7.8. Стабильный дефект для линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi : V \rightarrow V$ определяется как размерность *стабильного ядра*: $d^{(l)} = \dim(N^{(l)})$; начиная с номера l (являющегося *показателем стабилизации* для φ) происходит стабилизация *итерированных дефектов*. При $l \neq 0$ стабильный дефект может быть выражен как *алгебраическая кратность* нулевого *собственного значения* для линейного эндоморфизма φ . Стабильный дефект равен размерности всего пространства ($d^{(l)} = n = \dim(V)$) тогда и только тогда, когда данный оператор *нильпотентен*.

См. [LA], §§ 23, 25.

4.7.9. Стабильный образ для линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi : V \rightarrow V$ определяется как итерированный образ $M^{(l)}$, с которого начинается стабилизация итерированных образов; номером l стабильного образа служит *показатель стабилизации* для φ . Стабильный образ, как и все итерированные, является φ -инвариантным линейным подпространством пространства V ; сужение $\varphi'' = \varphi|_{M^{(l)}}$ линейного эндоморфизма φ на стабильный образ является *обратимым* линейным эндоморфизмом (линейным *автоморфизмом*), действующим в $M^{(l)}$. Итерированные ядра и итерированные образы стабилизируются *синхронно*, причем стабильное ядро и стабильный образ оказываются *взаимно дополнительными*: $N^{(l)} \oplus M^{(l)} = V$. Стабильный образ *тривиален* тогда и только тогда, когда линейный эндоморфизм φ *нильпотентен*.

См. [LA], §§ 23, 25.

4.7.10. Стабильный ранг для линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi : V \rightarrow V$ определяется как размерность *стабильного образа*: $r^{(l)} = \dim(M^{(l)})$; начиная с номера l (являющегося *показателем стабилизации* для φ) происходит стабилизация *итерированных образов*. Стабильный ранг в сумме со стабильным дефектом дает $n = \dim(V)$ (аналогичное соотношение имеет место для всех итераций). Стабильный ранг равен нулю тогда и только тогда, когда линейный эндоморфизм φ

нильпотентен.

См. [LA], §§ 23, 25.

4.7.11. Приращения итерированных дефектов для линейного оператора (эндоморфизма) φ , действующего в конечномерном линейном пространстве V , определяются как разности $p^{(k)} = d^{(k)} - d^{(k-1)}$; $k = 1, 2, \dots$. Поскольку итерированные дефекты $d^{(k)}$ строго возрастают при $0 \leq k \leq l$ и стабилизируются при $k \geq l$ (где l — показатель стабилизации для φ), то их приращения $p^{(k)} > 0$ при $k = 1, \dots, l$ и $p^{(k)} = 0$ при $k \geq l + 1$, а т. к. $d^{(0)} = 0$, то $p^{(1)} = d^{(1)}$. Сумма всех приращений равна стабильному дефекту: $p^{(1)} + \dots + p^{(l)} = d^{(l)}$.

Геометрический смысл приращений $p^{(k)}$: каждое из них равно размерности произвольного прямого дополнения $C^{(k)}$ к предыдущему итерированному ядру $N^{(k-1)}$ в текущем итерированном ядре $N^{(k)}$: $N^{(k)} = N^{(k-1)} \oplus C^{(k)}$; $k = 1, \dots, l$; при $k = 1$ имеем: $N^{(0)} = O$; $N^{(1)} = C^{(1)}$.

В силу неравенств Фробениуса $p^{(k)} \geq p^{(k+1)}$ ($k = 1, \dots, l - 1$), последовательность $p^{(k)}$ невозрастает.

Диаграммный смысл $p^{(k)}$: в столбчатой диаграмме \mathcal{D}_0 , представляющей жорданов базис в стабильном ядре линейного эндоморфизма φ , числа $p^{(k)}$ являются длинами диаграммных строк (нумерация которых ведется снизу вверх).

См. [LA], §§ 23–25.

4.7.12. Прямое дополнение к предыдущему итерированному ядру линейного эндоморфизма φ в текущем ядре — это линейное подпространство $C^{(k)} \leq N^{(k)}$ такое, что $N^{(k)} = N^{(k-1)} \oplus C^{(k)}$ ($k = 1, \dots, l$), где l — показатель стабилизации для φ . Размерность $C^{(k)}$ равняется разности $p^{(k)} = d^{(k)} - d^{(k-1)}$, т. е. текущему значению приращения итерированных дефектов.

Согласно теореме Фробениуса, дополнения $C^{(k)}$ можно выбрать специальным образом, так, чтобы φ -образ последующего дополнения $C^{(k+1)}$ содержался в текущем дополнении: $\varphi(C^{(k+1)}) \leq C^{(k)}$; это возможно, поскольку подпространство $\varphi(C^{(k+1)})$ является независимым с $N^{(k-1)}$: $\varphi(C^{(k+1)}) \cap N^{(k-1)} = O$.

Конкретная реализация такого выбора дополнений требует "движения сверху вниз" по этажам столбчатой диаграммы: на верхнем этаже (с номером $k = l$) дополнение $C^{(l)}$ к предстабильному ядру $N^{(l-1)}$ в стабильном ядре $N^{(l)}$ выбирается произвольно, а затем на каждом шаге вниз выбирается прямое дополнение $C^{(k)}$ к $N^{(k-1)}$ в $N^{(k)}$, содержащее образ $\varphi(C^{(k+1)})$.

Сужение линейного эндоморфизма φ на $C^{(k)}$ является мономорфиз-

мом (поскольку подпространство $C^{(k)}$ независимо с ядром $N^{(1)} = \text{Ker}(\varphi)$) и, следовательно, равенство размерностей $\dim(\varphi(C^{(k+1)})) = \dim(C^{(k+1)})$ влечет *неравенство Фробениуса*: $p^{(k)} \geq p^{(k+1)}$ ($k = 1, \dots, l-1$).

См. [LA], § 24.

4.7.13. Вторые абсолютные приращения итерированных дефектов для линейного оператора (эндоморфизма) φ , действующего в конечномерном линейном пространстве V , определяются как разности $q^{(k)} = p^{(k)} - p^{(k+1)}$; $k = 1, \dots, l$, где $p^{(k)}$ — первые приращения итерированных дефектов, т. е. $p^{(k)} = d^{(k)} - d^{(k-1)}$. Таким образом, $q^{(k)}$ являются абсолютными значениями приращений для первых приращений (сами по себе приращения для $p^{(k)}$ неположительны в силу *неравенств Фробениуса*); для удобства применения вторых приращений $q^{(k)}$ произведен также *сдвиг* на единицу их нумерации; на верхнем этаже получается: $q^{(l)} = p^{(l)}$. По построению, все $q^{(k)}$ неотрицательны; возможно обращение в нуль любого из них при $1 \leq k \leq l-1$; лишь последнее значение $q^{(l)}$ строго положительно. Сумма всех $q^{(k)}$ совпадает с *первым дефектом*: $q^{(1)} + \dots + q^{(l)} = d^{(1)}$.

Геометрический смысл вторых абсолютных приращений: каждое из них равно размерности произвольного *прямого дополнения* $D^{(k)}$ к образу $\varphi(C^{(k+1)})$ в $C^{(k)}$, т. е. $C^{(k)} = \varphi(C^{(k+1)}) \oplus D^{(k)}$; $\dim(D^{(k)}) = q^{(k)}$.

Диаграммный смысл $p^{(k)}$: в *столбчатой диаграмме* \mathcal{D}_0 , представляющей *жорданов базис* \mathcal{G}_0 в *стабильном ядре* $N^{(l)}$ линейного эндоморфизма φ , числа $q^{(k)}$ являются *длинами диаграммных ступенек*. На верхнем этаже диаграммы ($k = l$) ступенька всегда есть ($q^{(l)} = p^{(l)} > 0$), на остальных этажах ступеньки могут отсутствовать. Говорят также о *зонах* диаграммы \mathcal{D}_0 : $q^{(k)}$ является *длиной зоны*, объединяющей диаграммные столбцы высоты k .

См. [LA], §§ 23–25.

4.7.14. Жорданов базис в стабильном ядре $U = N^{(l)}$ для (необратимого) линейного эндоморфизма $\varphi : V \rightarrow V$ — это такой базис \mathcal{G}_0 в U , в котором сужению $\varphi' = \varphi|_U$ (этот оператор является *нильпотентным*, с показателем *нильпотентности* l , равным *показателю стабилизации* для φ) отвечает блочно-диагональная $(m \times m)$ -матрица (где $m = d^{(l)}$ — *стабильный дефект*) с *нильпотентными жордановыми ящичками* в качестве диагональных блоков.

Такой базис всегда существует; для его наглядного представления служит *столбчатая диаграмма* \mathcal{D}_0 ; каждому диаграммному столбцу в \mathcal{D}_0 соответствует один *нильпотентный жорданов ящик* $J_k(0)$, размер k которого равен высоте столбца; общее количество ящичков равно первому

дефекту $d^{(1)}$; ящички можно расположить по диагонали в порядке невозрастания их размеров.

См. [LA], § 25.

4.7.15. Столбчатая диаграмма, представляющая жорданов базис в стабильном ядре $U = N^{(l)}$ (необратимого) линейного эндоморфизма φ , действующего в конечномерном линейном пространстве V , — это таблица \mathcal{D}_0 , которая содержит $m = d^{(l)} = \dim(U)$ ячеек (где l — показатель стабилизации для φ , $d^{(l)}$ — стабильный дефект, равный алгебраической кратности нулевого собственного значения $0 \in \sigma(\varphi)$), в каждой из которых располагается один из базисных векторов. Ячейки сгруппированы в l диаграммных строк, которые выровнены по левому краю и нумеруются снизу вверх; строка с номером k ($1 \leq k \leq l$) содержит $p^{(k)}$ ячеек, где $p^{(k)} = d^{(k)} - d^{(k-1)}$ — первые приращения утерированных дефектов; таким образом, длины строк невозрастают при движении снизу вверх. Диаграмма \mathcal{D}_0 содержит $d^{(1)}$ диаграммных столбцов, высоты которых невозрастают при движении слева направо; для любого k имеется ровно $q^{(k)}$ диаграммных столбцов высоты k , где $q^{(k)} = p^{(k)} - p^{(k+1)}$ — вторые абсолютные приращения утерированных дефектов. Рассматриваются также зоны столбчатой диаграммы, объединяющие столбцы одинаковой высоты; верхние ячейки в зоне столбцов высоты k образуют ступеньку на k -м этаже; число $q^{(k)}$ является длиной этой ступеньки. На любом этаже, кроме верхнего, ступенька может отсутствовать (при $q^{(k)} = 0$). Для ячеек диаграммы \mathcal{D}_0 задается сквозная нумерация (в пределах от 1 до m) по следующему принципу: диаграммные столбцы нумеруются слева направо, ячейки в столбцах — снизу вверх.

В каждую из ячеек диаграммы \mathcal{D}_0 помещается один из векторов базиса \mathcal{G}_0 , конструируемого специальным образом, так, чтобы под действием φ каждый из векторов нижней строки отображался в нуль, а каждый из векторов в строках с номерами от 2 до l — переходил в вектор, расположенный в диаграмме под ним. (Действие оператора φ показывается на диаграмме вертикальными стрелками.)

Таким образом, векторы первой (нижней) строки \mathcal{D}_0 должны составлять базис в первом ядре $N^{(1)} = \text{Ker}(\varphi)$, векторы второй строки — базис в некотором прямом дополнении $C^{(1)}$ к ядру $N^{(1)}$ во втором ядре $N^{(2)}$, и, следовательно, векторы первых двух строк должны составлять базис в $N^{(2)}$, и т. д., вверх по этажам; векторы верхней строки будут составлять базис в прямом дополнении $C^{(l)}$ к предстабильному ядру в стабильном ($N^{(l)} = N^{(l-1)} \oplus C^{(l)}$). При таком построении базиса будет выполняться условие $\varphi(C^{(k+1)}) \leq C^{(k)}$ ($k = 1, \dots, l-1$) и векторы, расположенные на

ступеньках диаграммы, будут составлять базисы в прямых дополнениях $D^{(k)}$ ($C^{(k)} = \varphi(C^{(k+1)}) \oplus D^{(k)}$).

Каждый диаграммный столбец в \mathcal{D}_0 изображает *циклический базис* в одном из *циклических подпространств* Z_j ($1 \leq j \leq d^{(1)}$), каждое из Z_j является φ -инвариантным подпространством, причем сужению $\varphi|_{Z_j}$ отвечает в циклическом базисе матрица, являющаяся *нильпотентным жордановым ящиком* порядка, равного высоте диаграммного столбца.

См. [LA], § 25.

4.7.16. Циклическое подпространство в стабильном ядре (необратимого) линейного эндоморфизма φ — это такое φ -инвариантное линейное подпространство $Z \leq U$ стабильного ядра $U = N^{(l)}$, в котором существует *циклический базис* $[b_1, \dots, b_k]$ ($k = \dim(U) \leq l$), преобразующийся под действием φ следующим образом: $\varphi(b_1) = 0$; $\varphi(b_j) = b_{j-1}$ ($j = 2, \dots, k$). В циклическом базисе сужению $\varphi|_Z$ линейного оператора φ на подпространство Z отвечает $(k \times k)$ -матрица, являющаяся *нильпотентным жордановым ящиком* $J_k(0)$. Всё стабильное ядро U разбивается в *прямую сумму* циклических подпространств в количестве, равном первому дефекту $d^{(1)} = \text{dfc}(\varphi)$.

См. [LA], § 25.

§ 4.8. Корневые подпространства и теорема Жордана

4.8.1. Смещенные линейные эндоморфизмы для линейного эндоморфизма $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ (V — линейное пространство над полем P) определяются как эндоморфизмы вида $\psi_0 = \varphi - \lambda_0 \varepsilon$ ($\lambda_0 \in P$), каждый из которых получается вычитанием из φ *скалярного эндоморфизма* $\lambda_0 \varepsilon$. Смещенный эндоморфизм является *необратимым* тогда и только тогда, когда λ_0 является *собственным значением* для φ .

Если пространство V конечномерно и $\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ — *спектр* линейного эндоморфизма φ , то, вместе с φ , рассматривается семейство смещенных эндоморфизмов $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$ ($i = 1, \dots, s$), каждый из которых (по определению спектра) *необратим*. Если пространство V и эндоморфизм φ *арифметизированы* (путем фиксации базиса \mathcal{B} в пространстве V , в котором оператору φ отвечает квадратная матрица A), то смещенным операторам ψ_i отвечают (в базисе \mathcal{B}) *смещенные матрицы* $B_i = A - \lambda_i E$, каждая из которых *необратима*.

См. [LA], §§ 16–18.

4.8.2. Итерации смещенных линейных эндоморфизмов $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$ для линейного эндоморфизма φ ($\lambda_i \in \sigma(\varphi)$; $i = 1, \dots, s$) определяются как степени ψ_i^k ($k = 0, 1, 2, \dots$); все они *попарно коммутируют*. Если, в результате арифметизации задачи, оператору φ сопоставлена квадратная матрица A , то итерациям ψ_i^k будут сопоставлены степени $B_i^k = (A - \lambda_i E)^k$.

См. [LA], § 26.

4.8.3. Итерированные ядра для смещенных линейных эндоморфизмов $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$ [$\varphi : V \rightarrow V$; $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$; $i = 1, \dots, s$] образуют последовательность линейных подпространств $N_i^{(k)} = \text{Ker}(\psi_i^k)$; в обозначениях итерированных ядер верхний индекс k берется в скобки с тем, чтобы указать, что это — именно индекс, а не степень. Последовательность $N_i^{(k)}$ *строго возрастает* при $0 \leq k \leq l_i$ и *стабилизируется* при $k \geq l_i$, где l_i — некоторое натуральное число, не превышающее размерности $n = \dim(V)$ и являющееся *показателем стабилизации* для смещенного линейного оператора ψ_i .

Нулевое ядро тривиально: $N_i^{(0)} = O$; первое ядро $N_i^{(1)} = \text{Ker}(\psi_i)$ есть не что иное, как *собственное подпространство* для линейного эндоморфизма φ , отвечающее *собственному значению* λ_i ($N_i^{(1)} = S_{\lambda_i}(\varphi)$); стабильное ядро (с номером $k = l_i$) называется *корневым подпространством* для φ , отвечающим собственному значению λ_i (используется обозначение: $N_i^{(l_i)} = Q_{\lambda_i}(\varphi)$).

Каждое $N_i^{(k)}$ является φ -инвариантным линейным подпространством, а также — ψ_j -инвариантным (при любых $i, j = 1, \dots, s$). При $j = i$ имеют место включения $\psi_i(N_i^{(k)}) \leq N_i^{(k-1)} \leq N_i^{(k)}$ и сужение $\psi_i|_{N_i^{(k)}}$ оказывается *нильпотентным* линейным эндоморфизмом с показателем nilпотентности k ; в частности, при $k = 1$ получается *нулевое* сужение ψ_i (на *собственное подпространство* $W_i = N_i^{(1)}$), а при $k = l_i$ сужение ψ_i на *корневое подпространство* $U_i = N_i^{(l_i)}$ представляет собой nilпотентный линейный эндоморфизм $\psi_i|_{U_i}$ с показателем nilпотентности, равным l_i , т. е. — показателю стабилизации для ψ_i .

См. [LA], § 26.

4.8.4. Итерированные дефекты для смещенных линейных эндоморфизмов $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$ [$\varphi : V \rightarrow V$; $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$; $i = 1, \dots, s$] определяются формулами $d_i^{(k)} = \text{dfc}(\psi_i^k) = \dim(N_i^{(k)})$; $k = 0, 1, \dots$, где $N_i^{(k)} = \text{Ker}(\psi_i^k)$. Числовая последовательность $d_i^{(k)}$ *строго возрастает* при $0 \leq k \leq l_i$ и *стабилизируется* при $k \geq l_i$, где l_i — *показатель стабилизации* для линейного эндоморфизма ψ_i .

Итерированные дефекты связаны с *итерированными рангами* равенствами $d_i^{(k)} + r_i^{(k)} = n$, где $n = \dim(V)$. Вычислительная формула для итерированных дефектов: $d_i^{(k)} = n - \text{rank}(B_i^k)$, где $B_i = A - \lambda_i E$ — матрица, отвечающая смещенному оператору ψ_i в некотором базисе пространства V .

См. [LA], § 26.

4.8.5. Итерированные образы для смещенных линейных эндоморфизмов $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$ [$\varphi : V \rightarrow V$; $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$; $i = 1, \dots, s$] образуют последовательность линейных подпространств $M_i^{(k)} = \text{Im}(\psi_i^k)$ (верхний индекс в скобках обозначает номер итерации). Последовательность $M_i^{(k)}$ *строго убывает* при $0 \leq k \leq l_i$ и *стабилизируется* при $k \geq l_i$, где l_i — *показатель стабилизации* для смещенного линейного эндоморфизма ψ_i . Каждое $M_i^{(k)}$ является φ -инвариантным линейным подпространством, а также — ψ_i -инвариантным подпространством, причем $\psi_i(M_i^{(k)}) = M_i^{(k+1)} \leq M_i^{(k)}$.

См. [LA], § 26.

4.8.6. Итерированные ранги для смещенных линейных эндоморфизмов $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$ [$\varphi : V \rightarrow V$; $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$; $i = 1, \dots, s$] определяются формулами $r_i^{(k)} = \text{rank}(\psi_i^k) = \dim(M_i^{(k)})$; $k = 0, 1, \dots$, где $M_i^{(k)} = \text{Im}(\psi_i^k)$. Числовая последовательность $r_i^{(k)}$ *строго убывает* при $0 \leq k \leq l_i$ и *стабилизируется* при $k \geq l_i$, где l_i — *показатель стабилизации* для линейного эндоморфизма ψ_i . Вычислительная формула для итерированных дефектов: $r_i^{(k)} = \text{rank}(B_i^k)$, где $B_i = A - \lambda_i E$ — матрица, отвечающая смещенному оператору ψ_i в некотором базисе пространства V .

См. [LA], § 26.

4.8.7. Показатель стабилизации для смещенного линейного эндоморфизма $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$ [$\varphi : V \rightarrow V$; $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$; $i = 1, \dots, s$] есть натуральное число l_i , не превосходящее размерности $n = \dim(V)$, начиная с которого происходит ("синхронная") стабилизация последовательностей линейных подпространств $N_i^{(k)}$ (итерированных ядер) и $M_i^{(k)}$ (итерированных образов), а также — числовых последовательностей $d_i^{(k)}$ (итерированных дефектов) и $r_i^{(k)}$ (итерированных рангов) для линейного эндоморфизма ψ_i .

См. [LA], § 26.

4.8.8. Стабильное ядро $N_i^{(l_i)}$ для смещенного линейного эндоморфизма $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$ [$\varphi : V \rightarrow V$; $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$; $i = 1, \dots, s$] получает специальное название: *корневое подпространство* для линейного

эндоморфизма φ , отвечающее собственному значению λ_i ; используется специальное обозначение: $Q_{\lambda_i}(\varphi) = \text{Ker}(\psi_i^{l_i})$.

См. [LA], § 26.

4.8.9. Стабильный дефект $d_i^{(l_i)}$ для смещенного линейного эндоморфизма $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$ [$\varphi : V \rightarrow V$; $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$; $i = 1, \dots, s$] есть размерность корневого подпространства для φ , отвечающего собственному значению λ_i [$d_i^{(l_i)} = \dim(Q_{\lambda_i}(\varphi))$]; известно, что он равняется алгебраической кратности m_i для λ_i .

См. [LA], § 26.

4.8.10. Стабильный образ $M_i^{(l_i)}$ для смещенного линейного эндоморфизма $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$ [$\varphi : V \rightarrow V$; $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$; $i = 1, \dots, s$] является φ - (а также ψ_i -) -инвариантным линейным подпространством, дополнительным к стабильному ядру (корневому подпространству) $N_i^{(l_i)}$; размерность стабильного образа $M_i^{(l_i)}$ равна $n - m_i$, где m_i — алгебраическая кратность собственного значения λ_i ; эндоморфизм ψ_i является обратимым на $M_i^{(l_i)}$.

См. [LA], § 26.

4.8.11. Стабильный ранг $r_i^{(l_i)}$ для смещенного линейного эндоморфизма $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$ [$\varphi : V \rightarrow V$; $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$; $i = 1, \dots, s$] равен коразмерности $n - m_i$ стабильного ядра (корневого подпространства) $N_i^{(l_i)} = Q_{\lambda_i}(\varphi)$.

См. [LA], § 26.

4.8.12. Корневые подпространства $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$ для линейного оператора (эндоморфизма) φ , действующего в n -мерном линейном пространстве V (над полем P), определяются как стабильные ядра $N_i^{(l_i)}$ для смещенных линейных эндоморфизмов $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$, где λ_i пробегает спектр $\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ линейного эндоморфизма φ , а l_i является показателем стабилизации для ψ_i . Говорят, что корневое подпространство $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$ отвечает собственному значению λ_i . Корневое подпространство U_i содержит в себе собственное подпространство $W_i = S_{\lambda_i}(\varphi)$, отвечающее λ_i ; возможно совпадение $U_i = W_i$; оно имеет место тогда и только тогда, когда $l_i = 1$.

Размерность корневого подпространства U_i (она же: стабильный дефект $d_i^{(l_i)}$ для ψ_i) равна алгебраической кратности m_i собственного значения λ_i ; для сравнения: размерность собственного подпространства W_i равна геометрической кратности n_i для λ_i (или, что то же, — первому дефекту $d_i^{(1)}$ для ψ_i).

Как и собственные подпространства $W_i = S_{\lambda_i}(\varphi)$, корневые подпространства $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$ (отвечающие попарно различным собственным значениям λ_i ; $i = 1, \dots, s$) *независимы в совокупности*; как следствие, сумма $Q(\varphi)$ всех корневых подпространств является *прямой* (она называется *корневой суммой* для линейного эндоморфизма φ). Каждое из корневых подпространств U_i является *инвариантным*: (1) относительно исходного линейного эндоморфизма φ ; (2) относительно всех *смещенных* эндоморфизмов $\psi_j = \varphi - \lambda_j \varepsilon$. Сужение на U_i эндоморфизма ψ_i является *нильпотентным* линейным эндоморфизмом с *показателем nilьпотентности* l_i (равным *показателю стабилизации* для ψ_i). В связи с этим, сужение на U_i исходного оператора φ представляется в виде "скалярный эндоморфизм + nilьпотентный эндоморфизм", а именно: $\varphi'_i = \lambda_i \varepsilon_i + \psi'_i$, где $\varphi'_i = \varphi|_{U_i}$; $\psi'_i = \psi_i|_{U_i}$; ε_i — тождественный эндоморфизм пространства U_i . В то же время, при $j \neq i$ сужение $\psi_j|_{U_i}$ является *обратимым* линейным оператором.

См. [LA], §§ 26–27.

4.8.13. Корневые векторы для линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, отвечающие собственному значению $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$, — это *ненулевые* элементы корневого подпространства $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$. Для каждого корневого вектора $x \in U_i$ ($x \neq 0$) существует натуральное число k (не превышающее *показателя стабилизации* l_i для смещенного эндоморфизма $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$) такое, что $\psi_i^k(x) = 0$, но $\psi_i^{k-1}(x) \neq 0$; это число называется *высотой* корневого вектора x . Корневые векторы высоты $k = 1$ суть собственные векторы; для всякого корневого вектора x высоты $k > 1$ его $(k - 1)$ -й образ $\psi_i^{k-1}(x)$ является *собственным вектором*.

При "конструировании" *жорданова базиса* (для линейного эндоморфизма φ) в корневом подпространстве U_i выстраиваются *цепочки* корневых векторов вида $[x, \psi_i(x), \dots, \psi_i^{k-1}(x)]$, являющиеся базисами *циклических* (для оператора ψ_i) подпространств; говорят, что корневые векторы, входящие в такую цепочку (кроме последнего) являются *присоединенными* к этому последнему (являющемуся собственным) вектору. Корневые векторы, отвечающие попарно различным собственным значениям, *линейно независимы*. (Этот результат является обобщением аналогичного утверждения, справедливого для собственных векторов.)

См. [LA], §§ 26–27.

4.8.14. Приращения итерированных дефектов для смещенного линейного эндоморфизма $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$ [$\varphi : V \rightarrow V$; $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$; $i = 1, \dots, s$] определяются как разности $p_i^{(k)} = d_i^{(k)} - d_i^{(k-1)}$ ($k = 1, 2, \dots$).

Поскольку сами итерированные дефекты $d_i^{(k)}$ строго возрастают при $0 \leq k \leq l_i$ и стабилизируются при $k \geq l_i$, где l_i — показатель стабилизации для линейного эндоморфизма ψ_i , то их приращения $p_i^{(k)} > 0$ при $1 \leq k \leq l_i$ и $p_i^{(k)} = 0$ при $k \geq l_i$, а т. к. $d_i^{(0)} = 0$, то $p_i^{(1)} = d_i^{(1)}$. Сумма всех приращений $p_i^{(k)}$ равна стабильному дефекту: $p_i^{(1)} + p_i^{(2)} + \dots + p_i^{(l_i)} = d_i^{(l_i)}$.

Геометрический смысл приращений $p_i^{(k)}$: каждое из них равно размерности произвольного прямого дополнения $C_i^{(k)}$ к предыдущему итерированному ядру $N_i^{(k-1)}$ в текущем итерированном ядре $N_i^{(k)}$: $N_i^{(k)} = N_i^{(k-1)} \oplus C_i^{(k)}$; при $k = 1$ имеем: $N_i^{(1)} = C_i^{(1)}$. В силу неравенства Фробениуса $p_i^{(k)} \geq p_i^{(k+1)}$, т. е. последовательность $p_i^{(k)}$ не возрастает.

Диаграммный смысл $p_i^{(k)}$: в столбчатой диаграмме \mathcal{D}_i , представляющей жорданов базис в корневом подпространстве $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$, числа $p_i^{(k)}$ являются длинами диаграммных строк (нумерация строк идет снизу вверх).

См. [LA], §§ 26–28.

4.8.15. Прямое дополнение к предыдущему итерированному ядру $N_i^{(k-1)}$ (для смещенного линейного эндоморфизма) в текущем итерированном ядре $N_i^{(k)}$ — это линейное подпространство $C_i^{(k)} \leq N_i^{(k)}$ такое, что $N_i^{(k)} = N_i^{(k-1)} \oplus C_i^{(k)}$, где $N_i^{(k)} = \text{Ker}(\psi_i^k)$ — текущее итерированное ядро ($k = 1, \dots, l_i$); l_i — показатель стабилизации для линейного эндоморфизма $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$, являющегося смещенным относительно эндоморфизма $\varphi : V \rightarrow V$; $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$; $i = 1, \dots, s$. Размерность $C_i^{(k)}$ равняется разности $p_i^{(k)} = d_i^{(k)} - d_i^{(k-1)}$, т. е. текущему значению приращений итерированных дефектов для ψ_i .

Согласно теореме Фробениуса, дополнения $C_i^{(k)}$ можно выбрать так, чтобы (для любого $k \leq l_i - 1$) ψ_i -образ последующего дополнения $C_i^{(k+1)}$ содержался в текущем дополнении: $\psi_i(C_i^{(k+1)}) \leq C_i^{(k)}$. Возможность такого выбора вытекает из независимости линейных подпространств $N_i^{(k-1)}$ и $\psi_i(C_i^{(k+1)})$, а его конкретная реализация требует "движения сверху вниз" по этажам столбчатой диаграммы \mathcal{D}_i : на верхнем этаже (с номером $k = l_i$) дополнение $C_i^{(l_i)}$ к предстабильному ядру $N_i^{(l_i-1)}$ в стабильном ядре $N_i^{(l_i)}$ выбирается произвольно, а затем, на каждом шаге вниз, выбирается прямое дополнение $C_i^{(k)}$ к $N_i^{(k-1)}$ в $N_i^{(k)}$, содержащее образ $\psi_i(C_i^{(k+1)})$. Сужение оператора ψ_i на $C_i^{(k)}$ является мономорфизмом (поскольку подпространство $C_i^{(k)}$ независимо с первым ядром $N_i^{(1)}$) и, следовательно, $\dim(\psi_i(C_i^{(k+1)})) = \dim(C_i^{(k+1)})$, что влечет неравенство

Фробениуса: $p_i^{(k)} \geq p_i^{(k+1)}$.

В арифметизированном варианте задачи (действие оператора φ задается матрицей A , действие ψ_i — матрицей B_i) базисы подпространств $C_i^{(k)}$ хранятся в матрицах $G_i^{(k)}$ (размеров $n \times p_i^{(k)}$); теорема Фробениуса находит свое выражение в том, что произведение $B_i \cdot G_i^{(k+1)}$ оказывается подматрицей в матрице $G_i^{(k)}$ ($k = 0, \dots, l_i - 1$).

См. [LA], §§ 24, 26–28, прил. 3.

4.8.16. Вторые абсолютные приращения итерированных дефектов для смещенного линейного эндоморфизма $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$ [$\varphi : V \rightarrow V$; $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$; $i = 1, \dots, s$] определяются как разности $q_i^{(k)} = p_i^{(k)} - p_i^{(k+1)}$ ($k = 1, 2, \dots$), где $p_i^{(k)}$ — первые приращения итерированных дефектов, т. е. $p_i^{(k)} = d_i^{(k)} - d_i^{(k-1)}$. Таким образом, $q_i^{(k)}$ являются абсолютными значениями приращений для первых приращений (которые неположительны в силу *неравенства Фробениуса*); для удобства применения произведен сдвиг на единицу в нумерации вторых приращений; при $k = l_i$ имеем: $q_i^{(l_i)} = p_i^{(l_i)}$. По построению, все $q_i^{(k)}$ неотрицательны; возможно обращение в нуль любого из них при $1 \leq k \leq l_i - 1$; лишь последнее значение $q_i^{(l_i)}$ обязательно строго положительно. Сумма всех $q_i^{(k)}$ совпадает с первым дефектом для ψ_i : $q_i^{(1)} + q_i^{(2)} + \dots + q_i^{(l_i)} = d_i^{(1)}$.

Геометрический смысл вторых абсолютных приращений $q_i^{(k)}$: каждое из них равно размерности произвольного *прямого дополнения* $D_i^{(k)}$ к образу $\psi_i(C_i^{(k+1)})$ в $C_i^{(k)}$, т. е. $C_i^{(k)} = \psi_i(C_i^{(k+1)}) \oplus D_i^{(k)}$; $\dim(D_i^{(k)}) = q_i^{(k)}$ (где $C_i^{(k)}$ обозначает (специальным образом конструируемое) прямое дополнение к предыдущему итерированному ядру $N_i^{(k-1)}$ в текущем ядре $N_i^{(k)}$; $k = 1, \dots, l_i - 1$).

Диаграммный смысл $q_i^{(k)}$: в *столбчатой диаграмме* \mathcal{D}_i , представляющей *жорданов базис* \mathcal{G}_i в корневом подпространстве $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$, числа $q_i^{(k)}$ являются *длинами диаграммных ступенек*. На верхнем этаже диаграммы ($k = l_i$) ступенька всегда есть ($q_i^{(l_i)} = p_i^{(l_i)} > 0$), на остальных этажах ступеньки могут отсутствовать. Говорят также о *зонах* диаграммы \mathcal{D}_i : $q_i^{(k)}$ является длиной зоны, объединяющей диаграммные столбцы высоты k .

В арифметизированном варианте задачи (действие оператора φ задается матрицей A ; смещенному оператору ψ_i отвечает смещенная матрица $B_i = A - \lambda_i E$) базисы линейных подпространств $D_i^{(k)}$ записываются в матрицы $H_i^{(k)}$ (некоторые из них могут оказаться пустыми): на верхнем этаже диаграммы \mathcal{D}_i имеем; $H_i^{(l_i)} = G_i^{(l_i)}$; при спуске вниз, на каждом

из этажей \mathcal{D}_i , матрица $G_i^{(k)}$, содержащая базис в $C_i^{(k)}$, формируется как *конкатенация*: $G_i^{(k)} = (B_i \cdot G_i^{(k+1)} | H_i^{(k)})$; $k = 1, \dots, l_i - 1$.

См. [LA], §§ 26–28, прил. 3.

4.8.17. Жорданов базис в корневом подпространстве U_i для линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, отвечающем собственному значению $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$ ($i = 1, \dots, s$), есть не что иное как жорданов базис \mathcal{G}_i в *стабильном ядре* смещенного линейного эндоморфизма $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$. В этом базисе сужению $\psi_i|_{U_i}$ (которое является *нильпотентным* линейным эндоморфизмом) отвечает блочно-диагональная матрица с *нильпотентными жордановыми ящиками* $J_k(0)$ в качестве диагональных блоков. Сужению $\varphi|_{U_i}$ исходного оператора на подпространство U_i в базисе \mathcal{G}_i также отвечает блочно-диагональная матрица, диагональными блоками которой служат жордановы ящики вида $J_k(\lambda_i)$ (диагонали всех этих ящиков заполнены скаляром λ_i). Количество и размеры ящиков определяются с помощью *столбчатой диаграммы* \mathcal{D}_i для смещенного линейного эндоморфизма ψ_i . Параметры диаграммы \mathcal{D}_i , в свою очередь, вычисляются по итерированным дефектам $d_i^{(k)} = \text{dfc}(\psi_i^k)$, а также — их первым и вторым приращениям.

В арифметизированном варианте задачи жорданов базис в корневом подпространстве $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$ хранится в $(n \times m_i)$ -матрице G_i (где m_i — алгебраическая кратность λ_i), заполняемой векторами-столбцами, содержащимися в ячейках столбчатой диаграммы \mathcal{D}_i , в порядке, предписанном сквозной диаграммной нумерацией этих ячеек.

См. [LA], §§ 26–28, прил. 3.

4.8.18. Столбчатая диаграмма, представляющая жорданов базис в корневом подпространстве для линейного эндоморфизма $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, — это таблица \mathcal{D}_i , наглядно изображающая *жорданов базис* \mathcal{G}_i в корневом подпространстве $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$ для линейного оператора φ , отвечающем собственному значению $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$ ($i = 1, \dots, s$). Корневое подпространство U_i является, по определению, *стабильным ядром* для смещенного эндоморфизма $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$, и, в связи с этим, принцип построения диаграммы \mathcal{D}_i в точности совпадает с тем, который применяется при построении столбчатой диаграммы \mathcal{D}_0 в стабильном ядре линейного эндоморфизма. Ниже отмечаются важнейшие характерные особенности конструкции столбчатой диаграммы:

— диаграмма содержит m_i ячеек, где m_i — *алгебраическая кратность* собственного значения λ_i , или, что то же: $m_i = d_i^{(l_i)}$ — *стабильный дефект* для оператора ψ_i (здесь l_i — *показатель стабилизации* для ψ_i);

— ячейки сгруппированы в l_i *диаграммных строк*, которые выровнены по левому краю и нумеруются снизу вверх;

— диаграммная строка с номером k ($1 \leq k \leq l_i$) содержит $p_i^{(k)}$ ячеек, где $p_i^{(k)} = d_i^{(k)} - d_i^{(k-1)}$ — *первые приращения итерированных дефектов* $d_i^{(k)} = \text{dfc}(\psi_i^k)$;

— длины строк не возрастают при движении снизу вверх;

— общее количество *диаграммных столбцов* равно *геометрической кратности* n_i собственного значения λ_i , или, что то же: $n_i = d_i^{(1)}$ является первым из итерированных дефектов для ψ_i ;

— высоты диаграммных столбцов не возрастают при движении слева направо;

— для любого k ($1 \leq k \leq l_i$) имеется ровно $q_i^{(k)}$ диаграммных столбцов высоты k , где $q_i^{(k)} = p_i^{(k)} - p_i^{(k+1)}$ — *вторые абсолютные приращения итерированных дефектов*;

— диаграммные столбцы группируются в *зоны*, объединяющие столбцы одинаковой высоты; верхние ячейки в k -й зоне образуют *ступеньку* на k -ом этаже; число $q_i^{(k)}$ является *длиной* этой ступеньки; на любом этаже, кроме верхнего, ступенька может отсутствовать (при $q_i^{(k)} = 0$);

— для ячеек диаграммы задается *сквозная нумерация* по принципу: столбцы нумеруются слева направо, ячейки в столбцах — снизу вверх, "нарастающим итогом"; начальное значение номера (для нижней ячейки первого столбца) определяется порядковым номером собственного значения, оно равняется $m_1 + \dots + m_{i-1} + 1$ (т. е. сумме алгебраических кратностей предыдущих собственных значений плюс единица);

— в каждую из ячеек помещается определенный вектор из специальным образом конструируемого базиса \mathcal{G}_i в корневом подпространстве U_i , а именно, требуется, чтобы под действием смещенного оператора ψ_i каждый из векторов нижней строки отображался в нуль, а каждый из векторов в остальных строках — в вектор, расположенный в диаграмме непосредственно под ним;

— векторы первой (нижней) строки составляют базис в первом ядре $N_i^{(1)}$; векторы строки с номером k ($2 \leq k \leq l_i$) — базис в некотором прямом дополнении $C_i^{(k)}$ к предыдущему ядру $N_i^{(k-1)}$ в текущем ядре $N_i^{(k)}$; в частности, векторы последней (верхней) строки составляют базис в некотором прямом дополнении $C_i^{(l_i)}$ к предстабильному ядру $N_i^{(l_i-1)}$ в стабильном ядре $N_i^{(l_i)} = U_i$;

— если объединить векторы строк с номерами от 1 до k то получится базис в $N_i^{(k)}$;

— смещенный оператор ψ_i действует так, что выполняется условие $\psi_i(C_i^{(k+1)}) \subseteq C_i^{(k)}$; $k = 1, \dots, l_i - 1$;

— векторы, расположенные на ступеньках, составляют базисы в прямых дополнениях $D_i^{(k)}$ (каждое $D_i^{(k)}$ дополняет образ $\psi_i(C_i^{(k+1)})$ в подпространстве $C_i^{(k)}$ до всего этого подпространства);

— каждый диаграммный столбец представляет *циклический базис* для смещенного эндоморфизма ψ_i в одном из *циклических подпространств* Z_j ($1 \leq j \leq n_i$); каждое из Z_j является φ -инвариантным (и ψ_i -инвариантным), причем сужению $\varphi|_{Z_j}$ оператора φ на подпространство Z_j отвечает в циклическом базисе матрица, являющаяся жордановым ящиком $J_k(\lambda_i)$, порядок k которого равен высоте соответствующего диаграммного столбца.

См. [LA], §§ 26–28, прил. 3.

4.8.19. Корневая сумма для линейного оператора (эндоморфизма) φ , действующего в n -мерном пространстве V (над полем P), определяется как сумма всех его *корневых подпространств* $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$; $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$ ($i = 1, \dots, s$). В силу *независимости в совокупности* подпространств U_i , их сумма является *прямой*; используется обозначение: $Q(\varphi) = Q_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \dots \oplus Q_{\lambda_s}(\varphi)$, или, в краткой записи: $U' = U_1 \oplus \dots \oplus U_s$. Размерность корневой суммы равна *сумме алгебраических кратностей* всех собственных значений: $\dim(U') = m' = m_1 + \dots + m_s$.

Корневая сумма $U' = Q(\varphi)$ является φ -инвариантным линейным подпространством линейного пространства V , в котором всегда существует *жорданов базис* для линейного эндоморфизма φ . Условие $m' = n$ является критерием *полноты* корневой суммы ($Q(\varphi) = V$); в этом случае для оператора φ существует *полный жорданов базис* (т.е. жорданов базис во всем пространстве V). Если поле P *алгебраически замкнуто*, то условие полноты выполняется для любого эндоморфизма $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. В общем случае, если $m' < n$, то можно указать φ -инвариантное *прямое дополнение* U'' к корневой сумме U' , а именно: если характеристический многочлен для φ следующим образом разлагается на множители $h_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s} g(\lambda)$, где $g(\lambda)$ не имеет корней в поле P , то можно выбрать U'' как *ядро* оператора $g(\varphi)$, являющегося *значением* многочлена $g(\lambda)$ на линейном операторе φ .

См. [LA], §§ 26–28; [A], § 40.

4.8.20. Жорданов базис в корневой сумме $U' = Q(\varphi)$ для линейного оператора (эндоморфизма) φ , действующего в n -мерном пространстве V (над полем P), является *приспособленным* к этой (прямой) сумме базисом $\mathcal{G}' = [\mathcal{G}_1 | \dots | \mathcal{G}_s]$, где каждая подсистема \mathcal{G}_i является

жордановым базисом для φ в *корневом подпространстве* $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$ [$\lambda_i \in \sigma(\varphi)$; $i = 1, \dots, s$]. Такой базис всегда существует (это составляет содержание *теоремы Жордана*). В базисе \mathcal{G}' сужению $\varphi' = \varphi|_{U'}$ отвечает матрица J' , имеющая *жорданову нормальную форму*, параметры которой определяются по *столбчатым диаграммам* \mathcal{D}_i . В арифметизированном варианте задачи жорданов базис в U' представляется матрицей $G' = (G_1 | \dots | G_s)$ размера $n \times m'$, где m' — сумма алгебраических кратностей всех собственных значений для φ ; порядок $(n \times m_i)$ -блоков G_i определяется ранее принятым упорядочением собственных значений λ_i .

Если $m' = n$, то корневая сумма является *полной* ($U' = V$) и жорданов базис для φ существует во всем пространстве V . В этом случае матрица G' является квадратной и может интерпретироваться как *матрица перехода* ($T = G'$) от исходного (задающего арифметизацию) базиса в пространстве V к жорданову базису. Преобразование *подобия* $J = T^{-1}AT$ приводит матрицу A (отвечающую φ в исходном базисе) к *полной жордановой нормальной форме* $J = J'$. Если $m' < n$, то корневая сумма не является полной; выбирая φ -инвариантное *прямое дополнение* U'' к U' и продолжая жорданов базис \mathcal{G}' в U' путем присоединения к нему произвольного базиса \mathcal{G}'' в дополнении U'' , мы получаем *частично жорданов базис* $\mathcal{G} = [\mathcal{G}' | \mathcal{G}'']$ во всем пространстве V . В арифметизированном виде частично жорданов базис \mathcal{G} представляется квадратной матрицей $G = (G' | G'')$, блоки которой представляют базисы \mathcal{G}' и \mathcal{G}'' . Эта матрица может рассматриваться как *матрица перехода* ($T = G$) от исходного базиса к частично жорданову. Преобразование *подобия* $J = T^{-1}AT$ приводит матрицу A к *частично жордановой форме* $J = \text{diag}(J', J'')$, где $(m' \times m')$ -блок J' имеет жорданову нормальную форму и отвечает сужению $\varphi' = \varphi|_{U'}$, а блок J'' (размера $(n - m') \times (n - m')$) отвечает сужению $\varphi'' = \varphi|_{U''}$ с пустым (в поле P) спектром.

Если поле P является *алгебраически замкнутым*, то для любого эндоморфизма φ корневая сумма является полной. Однако и в общем случае можно добиться полноты корневой суммы ценой перехода от данного поля P к некоторому его *расширению* \tilde{P} , в котором характеристический многочлен $h_\varphi(\lambda)$ может быть разложен на линейные множители. При этом приходится расширять также и данное пространство V (*вкладывая* его в некоторое линейное пространство \tilde{V} над полем \tilde{P}) и *распространять* P -линейный оператор φ , действующий в V , до \tilde{P} -линейного оператора $\tilde{\varphi}$, действующего в \tilde{V} . В частности, в качестве \tilde{P} можно взять *алгебраическое замыкание* P .

См. [LA], §§ 27–28; [A], § 40.

4.8.21. Прямое дополнение к корневой сумме $U' = Q(\varphi)$ для линейного оператора (эндоморфизма) $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ (в случае, когда эта сумма не является полной) можно выбрать φ -инвариантным, используя не имеющий корней (в поле P) множитель $g(\lambda)$ в разложении характеристического многочлена $h_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s} g(\lambda)$. Для этого следует вычислить значение $g(\varphi)$ многочлена $g(\lambda)$ на линейном эндоморфизме φ и рассмотреть ядро $U'' = \text{Ker}(g(\varphi))$. Известно, что подпространство U'' , как и U' , является φ -инвариантным и притом — *дополнительным* к U' (т. е. $U' \oplus U'' = V$).

Если была произведена *арифметизация* задачи, позволяющая выразить действие линейного оператора φ с помощью соответствующей матрицы A , то прямое дополнение окажется заданным *первым* способом как *нуль-пространство* матрицы $g(A)$ [т. е. $U'' = L_{g(A)}^0$]; это позволит вычислить базис в U'' и перейти к "экономному" заданию U'' *вторым* способом: $U'' = R_{G''}$, где G'' — фундаментальная матрица для однородной системы линейных уравнений $g(A) \cdot \bar{x} = \bar{0}$.

См. [LA], § 28.

4.8.22. Продолжение жорданова базиса в корневой сумме $U' = Q(\varphi)$ до *частично жорданова базиса* для линейного эндоморфизма $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ во всем пространстве V осуществляется следующим образом: *жорданов базис* \mathcal{G}' в U' объединяется с некоторым базисом \mathcal{G}'' в φ -инвариантном прямом дополнении U'' к U' ; так получается *частично жорданов (для φ) базис* $\mathcal{G} = [\mathcal{G}' | \mathcal{G}'']$ во всем пространстве V . В базисе \mathcal{G} оператору φ отвечает блочно-диагональная квадратная матрица $J = \text{diag}(J', J'')$, у которой блок J' имеет *жорданову нормальную форму*, а блок J'' не имеет характеристических корней (в поле P).

При практическом решении (арифметизированной задачи) действие линейного оператора φ описывается с помощью квадратной матрицы A , базисы \mathcal{G}' , \mathcal{G}'' и \mathcal{G} хранятся в матрицах G' , G'' и G , размеров $n \times m'$, $n \times (n - m')$ и $n \times n$ соответственно; матрица $T = G$ может рассматриваться как *матрица перехода* от исходного базиса в пространстве V (при арифметизации он представляется естественным базисом \mathcal{E}_n в арифметическом пространстве P^n ; $n = \dim(V)$) к *частично жорданову базису* \mathcal{G} . *Частично жорданова форма* J для матрицы A получается с помощью преобразования *подобия* $J = T^{-1}AT$ (ее блочно-диагональный вид формируется автоматически за счет раннее произведенного выбора базисов \mathcal{G}' и \mathcal{G}'').

См. [LA], §§ 27–28.

§ 4.9. Алфавитный указатель

Алгебраическая кратность собственного значения	4.6.10
Аннулирующий многочлен для линейного эндоморфизма (для квадратной матрицы)	4.5.17
Арифметизация конечномерного линейного пространства	4.1.6
Арифметизация линейного оператора (эндоморфизма)	4.5.3
Арифметизация линейного отображения (гомоморфизма)	4.4.3
Арифметизация линейных подпространств	4.3.2
Арифметизация матриц перехода	4.2.10
Арифметизация собственных подпространств для линейного эндоморфизма	4.6.19
Арифметизация спектра линейного эндоморфизма	4.6.3
Арифметическое линейное пространство	4.1.2
Базис в линейном пространстве	4.2.7
Вторые абсолютные приращения итерированных дефектов для линейного оператора (эндоморфизма)	4.7.13
Вторые абсолютные приращения итерированных дефектов для смещенного линейного эндоморфизма	4.8.16
Блочное строение матрицы линейного эндоморфизма, действующего в полной прямой сумме	4.5.14
Геометрическая кратность собственного значения	4.6.17
Делимость характеристических многочленов	4.6.14
Дефект линейного оператора (эндоморфизма)	4.5.7
Дефект линейного отображения	4.4.8
Диагонализируемая квадратная матрица	4.6.23
Диагонализируемый линейный эндоморфизм (оператор)	4.6.22
Диагонализирующий базис для линейного эндоморфизма (оператора)	4.6.21
Естественный базис в арифметическом линейном пространстве	4.2.8
Жорданов базис в корневой сумме для линейного оператора (эндоморфизма)	4.8.20
Жорданов базис в корневом подпространстве для линейного оператора (эндоморфизма)	4.8.17
Жорданов базис в стабильном ядре для (необратимого) линейного эндоморфизма	4.7.14
Жорданов базис для линейного оператора (эндоморфизма)	4.6.26
Жорданов ящик	4.6.24
Жорданова нормальная форма для квадратной матрицы	4.6.27
Значение многочлена на линейном эндоморфизме (на квадратной матрице)	4.5.16
Инвариантное линейное подпространство относительно линейного эндоморфизма	4.5.11

Итерации (степени) линейного эндоморфизма	4.7.1
Итерации смещенных линейных эндоморфизмов	4.8.2
Итерированные дефекты для линейного оператора (эндоморфизма)	4.7.3
Итерированные дефекты для смещенных линейных эндоморфизмов	4.8.4
Итерированные образы для линейного оператора (эндоморфизма)	4.7.4
Итерированные образы для смещенных линейных эндоморфизмов	4.8.5
Итерированные ранги для линейного оператора (эндоморфизма)	4.7.5
Итерированные ранги для смещенных линейных эндоморфизмов	4.8.6
Итерированные ядра для линейного оператора (эндоморфизма)	4.7.2
Итерированные ядра для смещенных линейных эндоморфизмов	4.8.3
Конечномерное линейное пространство	4.1.3
Координатный изоморфизм конечномерного линейного пространства	4.1.5
Коразмерность линейного подпространства	4.3.9
Корневая сумма для линейного оператора (эндоморфизма)	4.8.19
Корневые векторы для линейного оператора (эндоморфизма)	4.8.13
Корневые подпространства для линейного оператора (эндоморфизма)	4.8.12
Линейная комбинация системы векторов	4.2.2
Линейная оболочка системы векторов	4.2.3
Линейно зависимая система векторов	4.2.5
Линейно независимая система векторов	4.2.6
Линейное отображение (линейный оператор, линейный гомоморфизм)	4.4.1
Линейное подпространство	4.3.1
Линейное пространство	4.1.1
Линейный изоморфизм	4.4.6
Линейный мономорфизм	4.4.4
Линейный эндоморфизм (линейный оператор, действующий в одном пространстве)	4.5.1
Линейный эндоморфизм с простым спектром	4.6.13
Линейный эпиморфизм	4.4.5
Матрица линейного отображения (оператора, гомоморфизма)	4.4.2
Матрица линейного эндоморфизма	4.5.2
Матрица линейного эндоморфизма, имеющего нетривиальное инвариантное подпространство	4.5.13
Матрица перехода от одного базиса в линейном пространстве к другому базису	4.2.9
Необратимый линейный эндоморфизм	4.5.5
Нильпотентная квадратная матрица	4.5.15a
Нильпотентный жорданов ящик	4.6.25
Нильпотентный линейный эндоморфизм	4.5.15
Образ линейного оператора (эндоморфизма)	4.5.8
Образ линейного отображения	4.4.9
Обратимый линейный оператор (линейный автоморфизм)	4.5.4
Операторы вложения и проектирования	4.3.6
Определитель линейного оператора (эндоморфизма)	4.5.10
Пересечение линейных подпространств	4.3.10
Подобные квадратные матрицы	4.5.2a
Показатель стабилизации для линейного оператора (эндоморфизма)	4.7.6
Показатель стабилизации для смещенного линейного эндоморфизма	4.8.7

Полная прямая сумма линейных подпространств	4.3.5
Порождающая система векторов	4.2.4
Приращения итерированных дефектов для линейного оператора (эндоморфизма)	4.7.11
Приращения итерированных дефектов для смещенного линейного эндоморфизма	4.8.14
Продолжение базиса	4.3.8
Продолжение жорданова базиса в корневой сумме до частично жорданова базиса для линейного эндоморфизма во всем пространстве	4.8.22
Прямая сумма линейных подпространств	4.3.4
Прямое дополнение к корневой сумме для линейного оператора (эндоморфизма)	4.8.21
Прямое дополнение к линейному подпространству	4.3.7
Прямое дополнение к предыдущему итерированному ядру (для смещенного линейного эндоморфизма) в текущем итерированном ядре	4.8.15
Прямое дополнение к предыдущему итерированному ядру линейного эндоморфизма в текущем ядре	4.7.12
Разложение на множители характеристического многочлена	4.6.12
Размерность конечномерного линейного пространства	4.1.4
Ранг линейного оператора (эндоморфизма)	4.5.9
Ранг линейного отображения	4.4.10
Система векторов в линейном пространстве	4.2.1
Смещенные линейные эндоморфизмы	4.8.1
Собственная сумма для линейного оператора (эндоморфизма)	4.6.19
Собственное значение для линейного оператора (эндоморфизма)	4.6.1
Собственное подпространство для линейного оператора (эндоморфизма)	4.6.16
Собственный вектор для линейного оператора (эндоморфизма)	4.6.15
Спектр квадратной матрицы	4.6.6
Спектр линейного эндоморфизма	4.6.2
Стабильное ядро для линейного оператора (эндоморфизма)	4.7.7
Стабильное ядро для смещенного линейного эндоморфизма	4.8.8
Стабильный дефект для линейного оператора (эндоморфизма)	4.7.8
Стабильный дефект для смещенного линейного эндоморфизма	4.8.9
Стабильный образ для линейного оператора (эндоморфизма)	4.7.9
Стабильный образ для смещенного линейного эндоморфизма	4.8.10
Стабильный ранг для линейного оператора (эндоморфизма)	4.7.10
Стабильный ранг для смещенного линейного эндоморфизма	4.8.11
Столбчатая диаграмма, представляющая жорданов базис в корневом подпространстве для линейного эндоморфизма	4.8.18
Столбчатая диаграмма, представляющая жорданов базис в стабильном ядре (необратимого) линейного эндоморфизма	4.7.15
Сужение линейного отображения на линейное подпространство, независимое с его ядром	4.4.11
Сужение линейного эндоморфизма на инвариантное линейное подпространство	4.5.12
Сумма алгебраических кратностей собственных значений	4.6.11
Сумма геометрических кратностей собственных значений	4.6.20

Сумма линейных подпространств	4.3.3
Характеристическая матрица для квадратной матрицы	4.6.4
Характеристические корни для линейного оператора (для квадратной матрицы)	4.6.9
Характеристический многочлен для квадратной матрицы	4.6.5
Характеристический многочлен для линейного оператора (эндоморфизма)	4.6.7
Характеристическое уравнение для линейного оператора (для квадратной матрицы)	4.6.8
Циклическое подпространство в стабильном ядре (необратимого) линейного эндоморфизма	4.7.16
Частично жорданов базис для линейного оператора (эндоморфизма)	4.6.28
Частично жорданова нормальная форма для квадратной матрицы ..	4.6.29
Эквивалентные матрицы	4.4.2a
Ядро (нуль-пространство) линейного оператора (эндоморфизма)	4.5.6
Ядро (нуль-пространство) линейного отображения (гомоморфизма) .	4.4.7

Список рекомендуемой литературы

Книги по линейной алгебре

1. *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1979.
2. *Беклемышев Д. В.* Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983.
3. *Беклемышева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М.: Наука, 1987.
4. *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2001.
5. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1980.
6. *Воеводин В. В., Воеводин В. Вл.* Энциклопедия линейной алгебры. Электронная система ЛИНЕАЛ. СПб.: БВХ-Петербург, 2006.
7. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. (Справочная математическая б-ка.) М.: Наука, 1984.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
9. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1998.
10. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.
11. *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1970.
12. *Икрамов Х. Д.* Задачник по линейной алгебре. М.: Наука, 1975.
13. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 2. Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2000.
14. *Кострикин А. И., Манин Ю. И.* Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986.

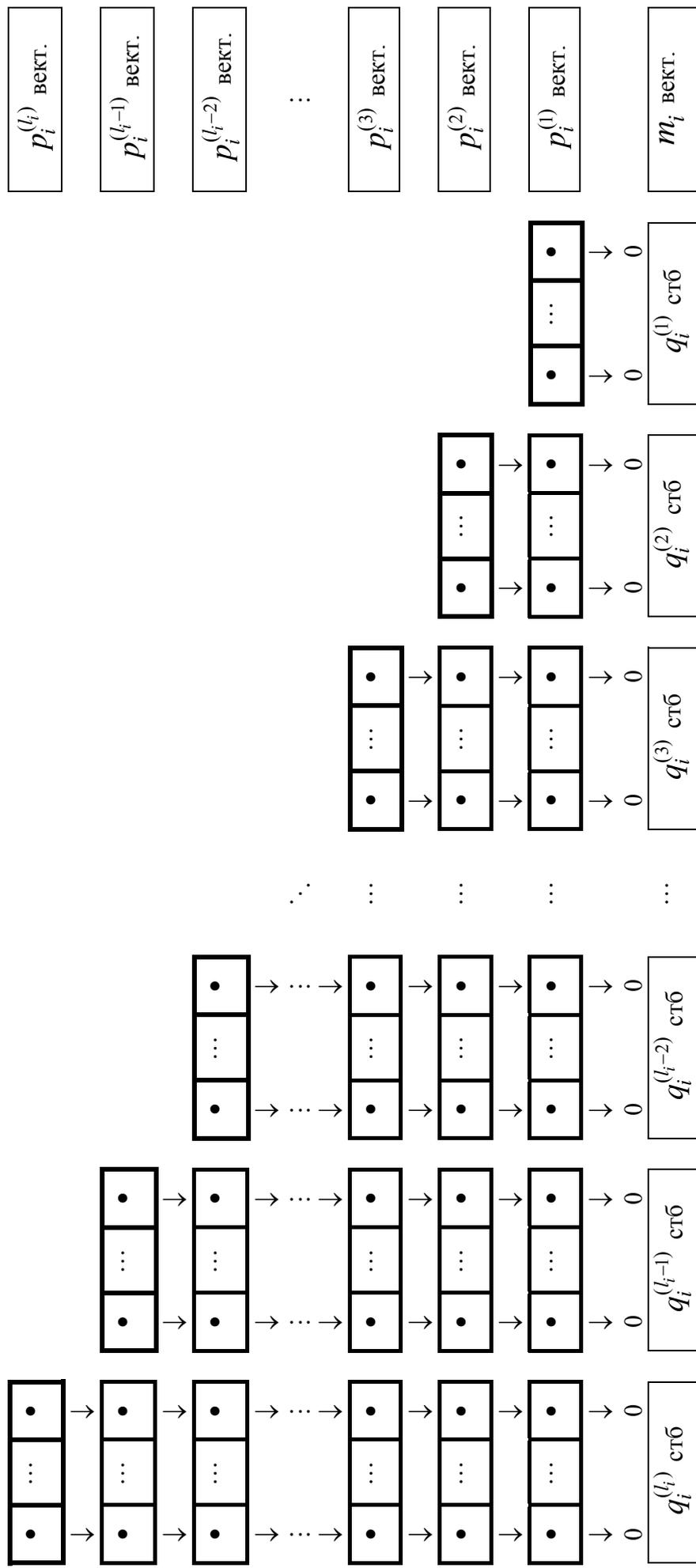
15. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978.
16. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1975.
17. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.
18. *Милованов М. В., Толкачев М. М., Тышкевич Р. И., Феденко А. С.* Алгебра и аналитическая геометрия. В 2-х частях. Мн.: Выш. шк., 1984, 1987.
19. *Мишина А. П., Проскуряков И. В.* Высшая алгебра: Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра. (Справочная математическая б-ка.) М.: ГИФМЛ, 1962.
20. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр 1. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1986.
21. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр 2. Линейная алгебра. М.: Наука, 1986.
22. *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, 1996.
23. *Проскуряков А. И.* Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1984.
24. *Райков Д. А.* Векторные пространства. М.: ГИФМЛ, 1962.
25. Сборник задач по алгебре / Под ред. А. И. Кострикина. М.: Физматлит, 2000.
26. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Под ред. Ю. М. Смирнова. М.: Логос, 2005.
27. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984.
28. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963.
29. *Федорчук В. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Изд-во МГУ, 1990.
30. *Халмош П.* Конечномерные векторные пространства. М.: Мир, 1970.
31. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

32. *Шеперман Л. Б.* Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях. Ч. 1,2. Мн.: Выш. шк., 1987.
33. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. М.: Наука, 1969.

Руководства по Maple

34. *Аладьев В. З.* Основы программирования в Maple. Таллинн: Международная Академия Ноосферы, Балтийское отделение, 2006.
35. *Аладьев В. З., Бойко В. К., Ровба Е. А.* Программирование и разработка приложений в Maple. Гродно: Гродненский гос. ун-т; Таллинн: Международная Академия Ноосферы, Балтийское отделение, 2007.
36. *Аладьев В. З., Богдявичус М. А.* Maple 6: Решение математических, статистических и физико-технических задач. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
37. *Говорухин В., Цибулин В.* Введение в Maple. Математический пакет для всех. М.: Мир, 1997.
38. *Говорухин В., Цибулин В.* Компьютер в математическом исследовании: Maple, MATLAB, LaTeX: Учеб. курс. СПб.: Питер, 2001.
39. *Дьяконов В. П.* Математическая система Maple V: R3/R4/R5. М.: СОЛОН, 1988.
40. *Дьяконов В. П.* Maple 7: Учеб. курс. СПб.: Питер, 2002.
41. *Дьяконов В. П.* Maple 9 в математике, физике и образовании. М.: СОЛОН-Пресс, 2004.
42. *Дьяконов В. П.* Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. М.: СОЛОН-Пресс, 2006.
43. *Молчанов Л. А.* Введение в Maple. Владивосток: Изд-во Дальневосточного ун-та, 2006.
44. *Савотченко С. Е., Кузьмичева Т. Г.* Методы решения математических задач в Maple. Белгород: Белаудит, 2001.
45. *Сдвижков С. А.* Математика на компьютере: Maple 8. М.: СОЛОН-Пресс, 2003.

Приложение. Вид столбчатой диаграммы



Учебное издание

ЯЦКИН Николай Иванович

**ЖОРДАНОВЫ (И ЧАСТИЧНО ЖОРДАНОВЫ) БАЗИСЫ
ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ
НАД ПОЛЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ**

Учебное пособие

Директор издательства *Л. В. Михеева*
Технический редактор *И. С. Сибирцева*

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 08.10.2010 г.
Формат 60 × 84¹/₁₆. Бумага писчая. Печать плоская.
Усл. печ. л. 10,5. Уч.-изд. л. 11,0. Тираж 100 экз.

Издательство «Ивановский государственный университет»
✉ 153025 Иваново, ул. Ермака, 39
☎ (4932) 93-43-41 E-mail: publisher@ivanovo.ac.ru

ООО «Центр социальной поддержки женщин и семьи»
Издательский центр «Юнона»
✉ 1530002 Иваново, пр. Ленина, 47